YENİ LİSE KİTAPLARI
(Zafer — Tuna Yayınları No. 2)

Tanrı, daima geometri kullanır.

EFLÂTUN.

GEOMETRİ

LİSE II

FEN KOLU

Mübeccel Sezer
Bursa Kız İlk Öğ. Ok.
196.2.B

DÖRDÜNCÜ BASKI

Yazan :
Tahsin ÇİZENEL
Bandırma Lisesi Matematik Öğretmeni

Bu kitap, Maarif Vekâletinin 22 Aralık 1960 tarih ve 17387 sayılı kararı ile liselerin ikinci sınıf fen kolları için ikinci defa ders kitabı olarak kabul edilmiştir.

Mahiye Mangıt
2012

OSMAN YALÇIN MATBAASI
İSTANBUL — 1961

PROGRAM [*]

GEOMETRİ LİSE II / FEN KOLU

Uzay geometri:

1. Üç boyut kavramı, düzlemin tanımı ve belirtilmesi. İki düzlemin arakesiti. Üç düzlemin arakesiti.

2. Paralel doğru ve düzlemler, bir düzleme paralel doğru, paralel düzlemler.

3. Kenarları paralel açılar. Uzayda her hangi iki doğru arasındaki açı.

4. Dik doğru ve düzlemler: Bir doğrunun bir düzleme diklik şartı, bir düzlemin dışındaki bir noktadan bu düzleme çizilen dikme ve eğikler.

5. İki düzlemli açılar. İki düzlemli açının ölçek açısı. Dik düzlemler. İki düzlemin diklik şartı.

6. Bir doğrunun bir düzlem üzerindeki dik izdüşümü. Bir doğrunun bir düzlemle yaptığı açı. Bir düzlemin diğer düzleme göre en büyük eğim doğrusu. Düzlem şeklin bir düzlem üzerindeki izdüşümünün alanı.

7. Prizma, dik dörtgenler prizması, küb; alan ve hacımları.

8. Piramit, silindir, koni ve kürenin özelliklerinin incelenmesi ve alanlarının, hacımlarının hesaplanması.

Trigonometri:

1. **İlk trigonometri bilgisi:** Dar açıların trigonometrik oranları; sinüs, kosinüs ve tangentin tanımları. Sinüs, kosinüs ve tangent arasındaki münasebetler. Toplamı (90°) olan iki açının trigonometrik oranları arasındaki münasebetler.

2. **Açı kavramının genelleştirilmesi:** Her hangi bir açının trigonometrik fonksiyonlarının tanımları. Bazı açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağıntılar. $y = \sin x$, $y = \cos x$ ve $y = tg\, x$ fonksiyonlarının grafikleri.

3. **Bir üçgende trigonometrik bağıntılar:** Sinüs, kosinüs, tangent teoremleri. Üçgenlerin temel çözümleri.

[*] Bu program, 7/Ekim/1957 tarih ve 976 sayılı tebliğler dergisinden alınmıştır.

UZAY GEOMETRİ

BÖLÜM I

UZAYDA DOĞRU VE DÜZLEMLER

1. Giriş. — Hacım, yüzey, çizgi ve nokta kavramları, uzayın maddesel varlıklarından deneme ve sezgi yolu ile kazanılır. Geometride:

Hacım, üç boyutlu (*uzunluk, genişlik, yükseklik*);
Yüzey, iki boyutlu (*uzunluk, genişlik*);
Çizgi, bir boyutlu (*uzunluk*);
Nokta ise boyutsuz

olarak düşünülür.

Geometri; hacım, yüzey, çizgi ve noktalardan teşekkül eden «geometri şekilleri» nin özelliklerini inceler. «Geometri Lise I» de, bütün elemanları aynı düzlem içinde bulunan düzlem geometri şekillerini inceledik. Bu seneki derslerimizde ise, bütün elemanları aynı düzlem içinde bulunmıyan «uzay geometri şekilleri» nin özelliklerini inceliyeceğiz.

2. Uzayda doğru ve nokta. — Doğru için aşağıdaki postulât kabul edilir:

Postulât. — **Uzayda verilen A ve B gibi iki noktadan ancak bir doğru geçer.**

Yani, iki noktası verilmiş olan doğru tamamen bellidir.

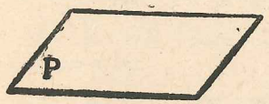
Netice. — İki noktası ortak olan bütün doğrular çakışırlar.

B noktası değiştirilecek olursa, bu postulât gereğince, **uzayda verilen bir A noktasından sayısız doğru geçer.**

3. Düzlemin tanımı. — Durgun su yüzeyi, pencere camının yüzeyi gibi maddesel varlıkların gözlemi, düzlem hakkında bize bir fikir

verir. Bir cetvel tahtasının kenarını yukarda söylenen yüzlere her istikamette temas ettirirsek, her defasında cetvel kenarının bütün noktaları bu yüzeylere değer. O halde düzlem için şu tanımı verebiliriz:

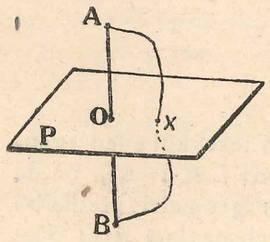
Üzerinde her istikamette doğrular çizilebilen yüzeylere *düzlem yüzeyler* veya kısaca *düzlem* denir. Bu tanımı, şöyle de yapabiliriz:



Şek. 1

Bir yüzeyin her hangi iki noktasını birleştiren doğru, tamamen bu yüzeyin içinde kalıyorsa bu yüzeye *düzlem* adı verilir.

Bir doğru iki yönden de sınırsız olduğundan, yukardaki tanıma göre, düzlem her yönden sınırsızdır. Fakat, bir düzlemi kâğıt veya tahta üzerinde gösterebilmek için onun dik dörtgen şeklinde sınırlı bir parçasını göz önüne alırız. Bu parça, görünüş sebebiyle bir paralelkenar şeklinde çizilip, yanına veya köşesine konulan bir harfle okunur: (P) düzlemi gibi (Şek. 1).

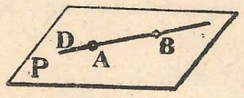


Şek. 2

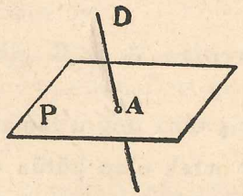
4. Yarım düzlem.— Bir düzlemin üzerinde alınan bir doğru, bu düzlemi iki parçaya ayırır; bu parçalardan her birine *yarım düzlem* denir. Doğruya, bu yarım düzlemlerin *başlangıç doğrusu* adı verilir.

5. Düzleme ait postulât.— **Bir düzlem, uzayı iki bölgeye ayırır; bu bölgelerin birinden diğerine hangi yoldan gidilirse gidilsin, düzleme uğramadan geçilemez** (Şek. 2).

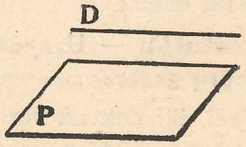
6. Bir doğrunun bir düzleme göre durumları. — Üç hal düşünülebilir:



Şek. 3



Şek. 4



Şek. 5

1°. Doğru ile düzlemin A ve B gibi iki ortak noktası vardır; bu halde *doğru, düzlemin içindedir* denir (Şek. 3).

2°. Doğru ile düzlemin bir ortak noktası vardır; bu halde *doğru, düzlemi kesiyor* denir.

«Şek. 4» de D doğrusu (P) düzlemini A noktasında kesiyor. Bu A noktasına, D doğrusunun (P) düzlemi üzerindeki *izi* veya *ayağı* denir.

3°. Doğru ile düzlemin ortak noktası yoktur; bu halde *doğru, düzleme paraleldir* denir (Şek. 5).

BİR DÜZLEMİN BELİRTİLMESİ

Bir düzlemin belirtilmesi ile ilgili olan aşağıdaki postulâtı kabul edeceğiz:

7. Postulât. — Bir doğru üzerinde bulunmıyan A, B, C gibi üç noktadan mutlaka bir düzlem geçer.

Açıklama: Şek. 6 da ince bir cam levhayı, sivri uclu üç çivi üzerinde durdurmanın mümkün olduğu görülmektedir.

Şek. 6

Soru. — Bu cam levhayı bir veya iki çivi üzerinde durdurabilir misiniz Hangi halde üç çivi üzerinde de durmaz?

C noktası değiştirilecek olursa, bu postulât gereğince, A ve B gibi verilmiş iki noktadan sayısız düzlem geçer ve bu düzlemlerin hepsi AB doğrusunu taşır. Demek ki:

Bir doğrudan geçen bütün yarım düzlemler tekmil uzayı doldurur; yani, uzayın her noktasından bunlardan hiç olmazsa bir tane geçer.

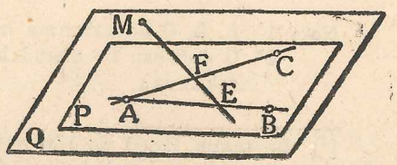
Bn postulâtı aşağıdaki teorem ile tamamlıyacağız:

8. Teorem. — Bir doğru üzerinde bulunmıyan A, B, C gibi üç noktadan ancak bir düzlem geçer, birden fazla geçemez.

İspatı: 1. A, B, C noktalarından geçen bir (P) düzlemi vardır (No. 7).

2. A, B, C noktalarından birden fazla düzlem geçemez:

Bir an için bu üç noktadan ikinci bir (Q) düzleminin geçtiğini düşünelim (Şek. 7); AB ve AC doğ-



Şek. 7

ruları hem (P) hem de (Q) düzlemine ait olurlar (No. 6 — 1°). (Q) düzleminin içinde alınan her hangi bir M noktasından, AB yi E noktasında ve AC yi F noktasında kesen bir doğru çizelim; E, F noktaları (P) düzlemine de ait olurlar. Şu halde EF doğrusu ve bunun üzerindeki M noktası, (P) düzleminin içinde bulunur.

(Q) düzlemine ait olan her M noktasının (P) düzlemine de ait olacağı, ayni şekilde gösterilebilir; öylese bu iki düzlem çakışıktır.

Yukardaki postulât ile bu teorem birleştirilerek:

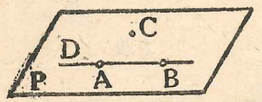
«Bir doğru üzerinde bulunmıyan üç nokta bir düzlem belirtir,» şeklinde ifade edilir.

9. Neticeler:

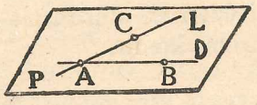
I. — Bir doğru ile dışındaki bir noktadan ancak bir düzlem geçer (Şek. 8).

II. — Kesişen iki doğrudan ancak bir düzlem geçer (Şek. 9).

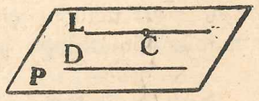
III. — Paralel iki doğrudan ancak bir düzlem geçer (Şek. 10).



Şek. 8



Şek. 9



Şek. 10

İspatı: III. — D//L olsun (Şek. 10); paralel iki doğrunun tanımı (*) gereğince D ve L doğruları bir (P) düzleminiu iki doğrusudur. L doğrusu üzerindeki bir C noktası D doğrusunun dışında bulunacağından, «netice I» gereğince bu iki paralelin düzlemi tektir.

Bu üç neticeden anlaşılır ki:

1°. Bir doğru ile dışındaki bir nokta,

2°. Kesişen iki doğru,

3°. Paralel iki doğru

bir düzlem belirtir.

Not: 1°. A, B, C noktalarının belirttiği düzlemi (ABC) şeklinde;
2°. D doğrusu ile dışındaki A noktasının belirttiği düzlemi $(\overline{D}, A)$ şeklinde;

[*] Bu tanım, lise I de görülmüştü: «Bir düzlem içinde bulunan ve kesişmiyen iki doğruya *paralel doğrular* denir.»

3°. Kesişen veya paralel olan D, L doğrularının belirttiği düzlemi $(\overline{D}, \overline{L})$ şeklinde göstereceğiz.

Sorular:

1. Üç ayaklı masalar, dört ayaklı masalardan daha kullanışlıdır. Niçin?
2. Bir kapıyı kilitlemek için bir kilit yeter. Niçin?
3. Uzayda üçü bir doğru üzerinde olmıyan dört nokta verilse, bu noktalardan kaç tane düzlem geçer?
4. Bir D doğrusu ile dışında bir A noktası veriliyor; A dan geçen ve D doğrusunu kesen bütün doğrular çizilse, bu doğrular nerede bulunurlar?

10. İki doğrunun birbirine göre durumları. — Farklı iki doğru D, L olsun; L doğrusu üzerinde alınan bir C noktası ile D doğrusunun belirttiği düzleme (P) diyelim; iki hal düşünülebilir:

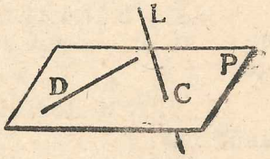
I. L doğrusu (P) düzleminin içindedir; bu takdirde:

a) A gibi bir ortak noktaları varsa, D, L doğruları *kesişirler* (Şek. 11);

b) Hiçbir ortak noktaları yoksa, D, L doğruları *paraleldir* (Şek. 12);

D ile L kesişir
Şek. 11

D ile L paraleldir
Şek. 12



D ile L aykırıdır
Şek. 13

II. L doğrusu (P) düzleminin içinde değildir; bu takdirde D ile L ye *aykırı doğrular* denir (Şek. 13).

Demek ki uzayda farklı iki doğru birbirine göre üç durum alabilir:

1°. Birbirini *keserler*;

2°. Birbirine *paralel* olurlar;

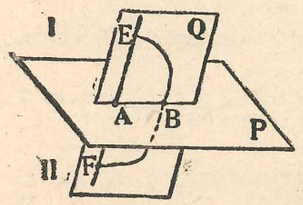
3°. Aynı düzlemde bulunmazlar. Yani *aykırı* olurlar.

Soru. — Kesişen yahut paralel olan D, L gibi iki doğru veriliyor; bu iki doğruyu da başka başka noktalarda kesen doğrular nerede bulunurlar?

İKİ DÜZLEMİN ARAKESİTİ

11. Teorem. — Farklı iki düzlemin bir ortak noktaları varsa, bu noktadan geçen bir ortak dağruları vardır.

İspatı: Farklı iki düzlem (P), (Q) ve bunların bir ortak noktası A olsun (Şek. 14). (Q) düzlemi içinde A dan geçen bir doğru çizip, bunun üzerinde A nın farklı taraflarında E, F gibi iki nokta alalım; bu noktalar, (P) düzleminin de farklı taraflarında bulunurlar. E ile F nin arasını, (Q) düzleminin içinde kalan her hangi bir eğri çizgi ile birleştirelim; bu çizgi, (P) düzlemini hiç olmazsa bir B noktasında keser (No. 5). Bu B noktası, hem (P) düzlemine, hem de (Q) düzlemine ait olacağından AB doğrusu her iki düzlemin de içinde bulunur (No. 6 — 1°).



Şek. 14

Diğer taraftan, «No. 9 — I» gereğince (P), (Q) düzlemlerinin AB doğrusu dışında hiçbir ortak noktaları bulunamaz.

12. Tanım. — Farklı iki düzlemin ortak doğrusuna bu iki düzlemin *arakesiti* veya *ayrıtı* denir.

Soru. — Bir (P) düzlemi ile bunu A noktasında kesen bir D doğrusu veriliyor; D doğrusundan geçen bir düzlemin (P) ile arakesiti hangi noktadan geçer?

13. İki düzlemin birbirine göre durumları. — Üç hal düşünülebilir:

1°. Bu iki düzlemin bir doğru üzerinde olmıyan üç ortak noktaları vardır:

Bu halde iki **düzlem** *çakışıktır.*

2°. Bu iki düzlemin bir ortak noktası vardır;

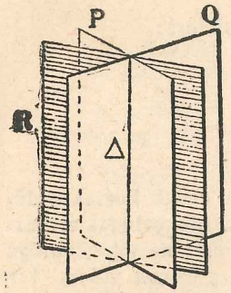
Bu halde iki düzlem, bu ortak noktadan geçen bir doğru boyunca *kesişir.*

3°. Bu iki düzlemin hiç ortak noktaları yoktur;

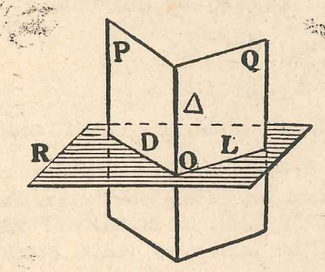
Bu halde iki düzlem *paraleldir.*

ÜÇ DÜZLEMİN ARAKESİTİ

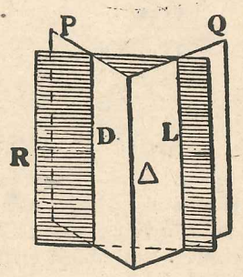
14. Bir △ doğrusu boyunca kesişen (P), (Q) düzlemleri, üçüncü bir (R) düzlemiyle kesilmiş olsun; △ doğrusu (R) düzlemine göre üç durumda olabilir:



Şek. 15



Şek. 16



Şek. 17

1°. △ *doğrusu* (R) *düzleminin içindedir.*

Bu takdirde, (P), (Q), (R) düzlemleri aynı bir △ doğrusu boyunca kesişmiş olurlar (Şek. 15).

2°. △ *doğrusu* (R) *düzlemini bir* O *noktasında keser.*

Bu takdirde, (R) düzleminin (P) ve (Q) düzlemleri ile olan arakesitleri bu O noktasından geçer. Çünkü bu O noktası, her üç düzleme de ait bir nokta olur (Şek. 16).

3°. △ *doğrusu* (R) *düzlemine paraleldir.*

Bu takdirde, (R) düzleminin (P) ve (Q) düzlemleri ile olan arakesitleri D ve L olduğuna göre:

$$\triangle \parallel D \parallel L$$

dir (Şek. 17).

Gerçekten, △ ile D, (P) düzlemine ait iki doğru olup kesişemezler. Bir noktada kesişseler, bu noktada △ doğrusu (R) düzlemini kesmiş olur. Halbuki △ // (R) farzedildi. Demek ki:

$$D \parallel \triangle$$

dır. Ayni şekilde (Q) düzleminde:

$$L \parallel \triangle$$

olduğu da gösterilir.

Bunlardan başka D // L olduğunu da söyleyebiliriz:

Gerçekten, D, L doğruları (R) düzlemine ait olup kesişemezler. Bir noktada keşişseler, bu nokta, hem (P) ve hem de (Q) düzlemine ait olur. Böyle olunca △ doğrusunun da aynı noktadan geçmesi gerekir ve △ // (R) şartı bozulur. Şu halde:

$$\triangle \parallel D \parallel L$$

dir.

Özet: İkişer ikişer kesişen üç düzlemin arakesitleri:

1°. Ya aynı bir doğrudur;

2°. Ya aynı noktadan geçerler;

3°. Yahut ikişer ikişer birbirine paralel olurlar.

Bilgi. — Uzay geometri şekillerinin hakiki durumları, ancak boşlukta düşünülebilir; kâğıt veya tahta üzerinde gösterilemez. Fakat, biz, çalışmalarımızda kolaylık sağlamak için bu şekillerin resimlerini kâğıt üzerine veya tahtaya çizeriz. Resimlerin çizildiği bu kâğıt veya tahta, karşıdan görünen düşey bir düzlemi teslim eder[*].

Bu resimleri, uzay geometri şekli olarak kolayca tasarlıyabilmek için:

1°. Şeklin aslında düşey olan doğruları, yine düşey olarak göstermelidir.

2°. Şeklin aslında kâğıt düzlemine paralel olan yatay doğruları, yine, yatay olarak göstermelidir.

3°. Şeklin aslında kâğıt düzlemine paralel olmıyan yatay doğruları, eğik olarak göstermelidir.

4°. Şeklin aslında birbirine paralel olan iki doğruyu, yine paralel olarak göstermelidir.

5°. Bir çemberin düzlemi kâğıt düzlemine paralelse, resmi yine bir çember; değilse, bir elips olarak gösterilmelidir.

6°. Şeklin aslında olupta rerimde görünmeyecek olan çizgileri, nokta nokta ile veya şeklin diğer çizgilerine nazaran daha ince olarak göstermelidir.

Buraya kadar çizdiğimiz şekillerde ve kitabın diğer şekillerinde yukardaki hususların göz önünde tutulduğuna dikkat ederek, benzer tarzda hareket ediniz.

I. BÖLÜM ÜZERİNE:

A) PROBLEMLER

(Bilgi. — Uzay geometri problemlerini çözerken şu hususlara dikkat etmelisiniz:

1°. Bir doğrunun bir düzlemi kestiğini göstermek gerektiği zaman, bu doğrunun düzlem içindeki bir doğru ile kesiştiğini görmeye çalışınız. Bulunan nokta bu doğrunun düzlem üzerindeki izi olur.

2°. İki düzlemin kesiştiğini göstermek gerektiği zaman, birinin içindeki bir doğrunun, diğerinin içindeki bir doğru ile kesiştiğini görmeya çalışınız. Arakesit, bu iki doğrunun kesim noktasından geçer.

3°. İki düzlemin arakesitini bulmak gerektiği zaman, bu iki düzlemde ortak olan iki nokta bulmalıdır.

[*] Çekül doğrultusunda olan bir doğrudan geçen her düzlem, düşey bir düzlemdir.

4°. Uzayda üç noktanın bir doğru üzerinde olduğunu göstermek gerektiği zaman bu noktaların, farklı iki düzleme ait olduklarını görmeye çalışınız.)

1. *Kesişen D, L doğruları veriliyor; (P) yi kesen L ye paralel olan bütün doğrular nerede bulunurlar?*

Cevap: $(\overline{D}, \overline{L})$ düzleminde bulunurlar.

2. *Kesişen (P) ve (Q) düzlemleri veriliyor; (P) düzleminin bir doğrusu D, (Q) düzleminin bir doğrusu da L olduğuna göre:*

a) D doğrusu ile L doğrusu her zaman kesişir mi?

b) D, L doğruları kesiştikleri takdirde, kesim noktaları nerede bulunur?

3. *(P), (Q) gibi iki düzlem veriliyor; (P) düzleminin D doğrusu (Q) düzleminin L doğrusunu A noktasında ve (P) düzleminin D' doğrusu, (Q) düzleminin L' doğrusunu A' noktasında kestiğine göre (P), (Q) düzlemlerinin arakesitleri hangi doğrudur?* (AA' doğrusudur.)

4. *İkişer ikişer kesişen üç doğru, ya aynı düzlem içinde bulunurlar; yahut aynı bir noktadan geçerler. Niçin?*

5. *Bir ABC üçgeni ile bunun düzlemi dışında bir O noktası veriliyor; AB nin bir noktası M, AC nin bir noktası da N olduğuna göre:*

a) BC doğrusu ile (OMN) düzleminin kesim noktasını bulunuz.

Cevap: MN ile BC nin kesim noktası, aranılan noktadır.

b) (ABC), (OAB); (OAB), (OBC); (ABC), (OMN); (OM_N), (OBC) düzlem çiftlerinin arakesitlerini bulunuz.

6. *Bir ABCD* (AB // CD) *yamuğu ile bunun düzlemi dışında bir O noktası veriliyor;*

(OAC), (OBD) ; (OAD), (OBC)

düzlem çiftlerinin ayırtlarını bulunuz.

7. *Bir ABCD uzay dörtgeni* [*] *veriliyor. AB, BC, CD kenarları üzerinde sıra ile X, Y, Z noktaları alınıyor.*

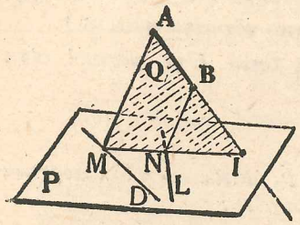
AC, BD, AD doğruları ile (XYZ) düzleminin kesim noktalarını bulunuz.

8. *Merkezi O olan bir daire ile bu dairenin düzlemi içinde bir A noktası ve dairenin düzlemi dışında bir B noktası veriliyor. Daire çevresi ile (AOB) düzleminin kesim noktalarını bulunuz.*

9. *Bir O noktasında kesişen X, Y doğruları ile bunların düzlemini I noktasında delen bir Z doğrusu veriliyor. Bu üç doğruyu da kesen doğruların hepsi nerede bulunurlar ve hangi sabit noktadan geçerler?*

10. *Bir (P) düzlemi içinde bulunan D, L doğruları ile düzlem dışında A, B noktaları veriliyor. AB doğrusundan geçen değişken bir*

[*] Dört köşesi de aynı düzlem içinde bulumıyan dörtgene *uzay dörtgeni* denir.



Şek. 18

(Q) düzlemi, D doğrusunu M noktasında ve L doğrusunu da N noktasında kesiyor.

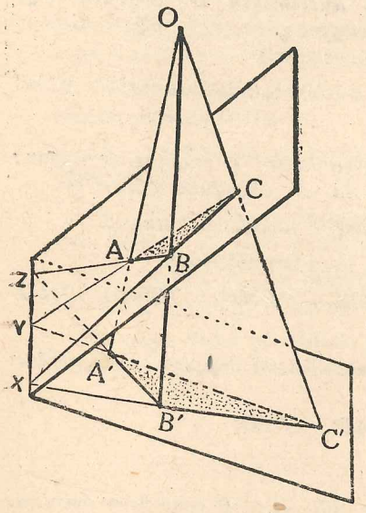
MN doğrusunun sabit bir noktadan geçtiğini gösteriniz (Şek. 18).

11. Desargues Problemi — *Bir O noktasından çıkan üç yarım doğru üzerinde ikişer ikişer A, A' ; B, B' ; C, C' noktaları alınıyor. BC ile B'C' nün kesim noktası X, AC ile A'C' nün kesim noktası Y, AB ile A'B' nün kesim noktası da Z olduğuna göre :*

X, Y, Z noktaları aynı doğru üzerinde bulunurlar. Niçin?

Karşıt olarak, ABC, A'B'C' gibi iki üçgen verildiğinde, bunların karşılıklı kenarları ikişer ikişer X, Y, Z gibi birer noktada kesişirlerse :

AA' , BB' , CC' doğruları, aynı bir O noktasından geçerler veya birbirine paralel olurlar. Ayrıca X, Y, Z noktaları bir doğru üzerinde bulunurlar. Niçin?

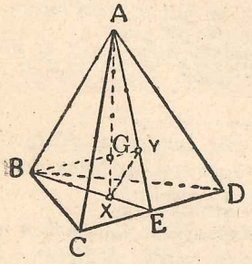


Şek. 19

Çözüm : X, Y, Z noktaları, (ABC), (A'B'C') düzlemlerinin arakesit doğrusu üzerinde bulunurlar. Çünkü bu üç nokta, iki düzlemde de ortaktır (Şek. 19).

Karşıt olarak, kenarlar ikişer kesiştiğine göre, şekle dikkat edilirse, ikişer ikişer kesişen (BCC'B'), (ACC'A'), (ABB'A') düzlemlerinin arakesitlerinin AA', BB', CC' olduğu görülür. «No. 14» gereğince bu üç arakesit, bir O noktasından geçer veya birbirine paralel olurlar.

Ayrıca, X, Y, Z noktaları (ABC), (A'B'C') düzlemlerinin arakesiti üzerinde bulunurlar. Çünkü bu noktalar, iki düzlemde de ortaktır.



Şek. 20

12. *Aynı düzlem içinde bulunmıyan A, B, C, D noktaları veriliyor. BCD üçgeninin ağırlık merkezi X ve ACD üçgeninin ağırlık merkezi Y olduğuna göre :*

a) AX, BY doğrularının bir G noktasında kesişeceklerini ;

b) $\frac{GA}{GX} = \frac{3}{1}$ *olduğunu gösteriniz.*

Yol gösterme [*] : Şek. 20 de E noktası, DC nin ortasıdır; XY//AB olacağını görünüz.

[*] Bundan sonra, «Yol gösterme» yerine kısaca (Y. g.) yazılacaktır.

B) ÇİZİM PROBLEMLERİ

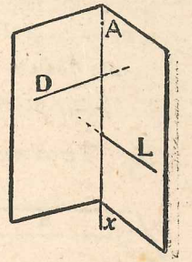
(Bilgi. — Geometride çizimler, pergel ve cetvel ile yapılır. Düzlem geometride gördüğümüz temel çizimleri, uzay geometride de kullanacağız; yalnız, bu çizimlerin hangi düzlemde yapılacağını belirtmek gerektir. Meselâ : «A noktasından D doğrusuna bir dikme çizelim,» dediğimizde, bu çizimin, (A, D) düzlemi içinde pergel ve cetvel ile yapılabileceğini biliriz.

Uzay geometride, «*Bir doğrunun bir düzlemi kestiği noktayı bulmak*» ve «*İki düzlemin arakesitini bulmak*» çizimlerini sık sık kullanırız.

Bu çizimlerin pergel ve cetvel ile yapılışı, tasarı geometrinin konusudur. Onun için bu sene yapacağımız çizimlerde, bir doğrunun bir düzlemi kestiği nokta olarak düzlem içinde münasip bir nokta almakla; iki düzlemin arakesiti olarak da münasip bir doğru almakla yetineceğiz.)

13. *Uzayda bir A noktası ile D, L doğruları veriliyor; A dan geçen ve bu iki doğruyu da kesen bir doğru çiziniz.*

Çözüm : Aranılan doğru, (A, D), (A, L) düzlemlerinin arakesiti olarak bellidir (Şek. 21).



Şek. 21

İrdeleme : (A, D), (A, L) düzlemleri birer tane olduğundan arakesitleri de bir tanedir. Şu halde problemin genel olarak bir çözümü vardır.

Hangi halde çizim mümkün değildir?

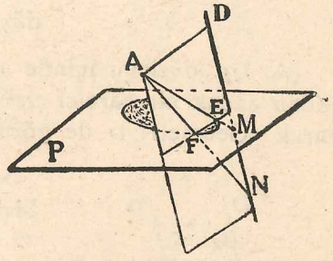
14. *Uzayda her hangi üç doğru verildiğine göre, bu doğruların her üçünü de kesen bir doğru çiziniz.*

15. *Bir çember ile bunun düzlemi dışında bir A noktası ve bir de D doğrusu veriliyor. A dan geçen öyle bir doğru çiziniz ki bu, D doğrusunu ve çemberi kessin.*

(Y. g.) AEM, AFN doğrularının, istenilen doğrular olacağını görünüz (Şek. 22).

16. *Bir (P) düzlemi ile, düzlem içinde olmıyan bir O noktası ve bir de D doğrusu veriliyor. O dan geçen ve D doğrusunu A noktasında, (P) düzlemini de B noktasında kesen öyle bir doğru çiziniz ki :*

AB doğru parçasının ortası O noktası olsun.



Şek. 22

17. *Uzayda bir XY doğrusu ile A ve B gibi iki nokta veriliyor. AB den geçen öyle bir düzlem belirtiniz ki bu düzlemin XY yi kestiği nokta M olduğuna göre MAB üçgeni M köşesinde dik açılı olsun.*

BÖLÜM II

PARALEL DOĞRU VE DÜZLEMLER

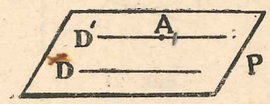
PARALEL DOĞRULAR

15. Tanım. — Bir düzlem içinde bulunan ve birbirini kesmiyen iki doğruya *paralel doğrular* denir.

Not: Bu tanımdan anlaşılır ki uzayda iki doğrunun paralelliğini göstermek için, bu doğruların:

1. Bir düzlem içinde bulunduklarını;
2. Hiçbir ortak noktaları olmadığını göstermelidir.

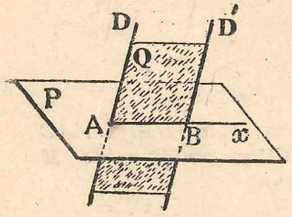
16. Teorem. — Bir doğruya dışındaki bir noktadan ancak bir paralel doğru çizilebilir.



Şek. 23

İspatı: D doğrusuna dışındaki A noktasından çizilecek olan paralel doğru, D ile aynı bir düzlem içinde bulunur. Bu düzlem, A noktası ile D doğrusunun belirttiği (A, $\overline{D}$) düzlemidir ve tektir (No. 9—1) (Şek. 23).

(A, $\overline{D}$) düzlemi içinde ise, «D doğrusuna dışındaki A noktasından ancak bir paralel çizilebileceği,» Öklit postulâtının bir neticesi olarak «Geometri I» de görüldü.



Şek. 24

17. Teorem. — Paralel iki doğrudan birini kesen düzlem diğerini de keser.

Hipotez: D//D' ve (P) düzlemi D yi A noktasında keserse (Şek. 24),

Hüküm: (P) düzlemi D' yü de keser.

İspat: D ile D' nün belirttiği düzlem (Q) olsun; (P), (Q) düzlemlerinin A dan geçen Ax gibi bir arakesitleri vardır (No. 11). D, D', Ax doğruları (Q) düzleminin içindedir. Ax doğrusu, D yi

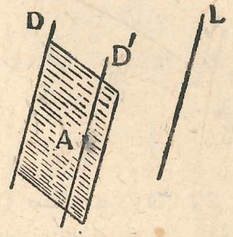
kestiği için onun paraleli olan D' yü de bir B noktasında keser. Bu nokta, (P) düzlemi ile D' doğrusunun kesim noktası olur.

18. Teorem. — Aynı bir doğruya paralel olan iki doğru birbirine paraleldir.

Hipotez: D//L, D//L ise (Şek. 25),

Hüküm: D//D' dür.

İspat: 1. D, D' doğruları, D' nün bir A noktası ile D nin belirttiği düzlem içinde bulunurlar.



Şek. 25

Gerçekten, (A, $\overline{D}$) düzlemi D' doğrusunu içine almazsa, onu, A noktasında kesmiş olur. Bu takdirde D ye paralel olan L doğrusunu da bir noktada keser. L yi kesince, ona paralel olan D doğrusunu da bir noktada kesecektir (No. 17). Halbuki D yi kesmeyip içine almaktadır. Şu halde D doğrusu (A, $\overline{D}$) düzleminin içindedir.

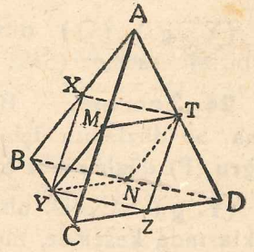
2. D, D' doğruları «No. 15» gereğince birbirini kesemez.

O halde D//D'
olur.

19. Uygulama. — **Bir ABCD uzay dörtgeninde:**

1°. Kenarların orta noktaları, bir paralelkenarın köşeleri olur;

2°. Karşılıklı iki kenarın orta noktaları ile köşegenlerin orta noktaları, bir parelelkenarın köşeleri olur. Niçin?



Şek. 26

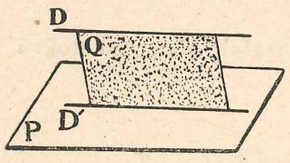
(Y. g.) 1°. XY//=TZ; **2°.** MT//=YN **olacağını görünüz (Şek. 26).**

DOĞRU İLE DÜZLEMİN PARALELLİĞİ

20. Tanım. — Bir doğru ile bir düzlemin ortak noktaları yoksa, bu doğru ile düzlem birbirine *pareleldir* denir.

21. Teorem. — Bir düzlemin içindeki bir doğruya paralel olan ve düzlem içinde bulunmıyan her doğru, bu düzleme paraleldir.

Hipotez: D′ , (P) düzleminin bir doğrusu ve D//D′ ise (Şek. 27),



Şek. 27

Hüküm : D//(P) dir.

İspat : Birbirine paralel olan D , D′ doğrularının belirttiği (Q) düzlemi, (P) yi D′ doğrusu boyunca keser. D doğrusu ile (P) düzlemi bir ortak noktaya malik olsalar, bu nokta, ancak D′ doğrusu üzerinde olabilir. Bu ise, hipotez gereğince mümkün değildir. Şu halde

D//(P)

olur.

22. Uygulama (Çizim). — Bir düzlemin dışındaki bir O noktasından bu düzleme parelel bir doğru çizmek için : düzlem içinde alınan her hangi bir D′ doğrusuna O noktasından bir paralel çizilir.

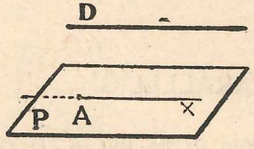
Netice. — Bir düzlemin dışındaki bir noktadan bu düzleme sonsuz sayıda paralel doğru çizilebilir.

23. Karşıt teorem. — Bir D doğrusu bir (P) düzlemine paralelse, D den geçen ve (P) yi kesen her hangi bir (Q) düzleminin (P) ile arakesiti olan D′ doğrusu D doğrusuna paraleldir.

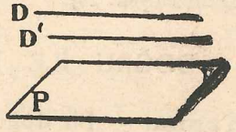
(Y . g.) (Q) düzlemine ait olan bu D , D′ doğruları niçin birbirini kesemez (Şek. 27)?

24. Teorem. — Bir (P) düzlemine paralel olan bir D doğrusuna, bu düzlemin içinde alınan bir A noktasından çizilen paralel doğru (P) düzleminin içinde kalır.

(Y. g) AX//D olsun (Şek. 28); (P) düzlemi AX doğrusunu A noktasında kesemez, niçin? (No. 17). Şu halde onu içine alır.



Şek. 28



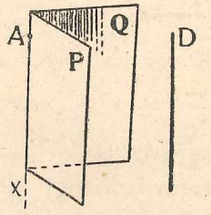
Şek. 29

25. Teorem. — İki paralel doğrudan birine paralel olan bir düzlem, diğer doğruya da paralel olur veya o doğruyu içine alır.

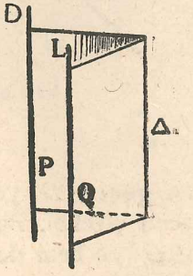
(Y. g.) D//D′ , D//(P) olsun (Şek. 29); D′ doğrusu (P) düzlemini kesemez, niçin? (No. 17).

26. Teorem. — Bir doğru, kesişen iki düzlemin her birine paralel ise bunların arakesitine de paraleldir.

(Y. g.) Şekil 30 da arakesit üzerinde alınan bir A noktasından D doğrusuna çizilen AX paraleli, niçin hem (P), hem de (Q) düzleminin içinde kalır? (No. 24).



Şek. 30



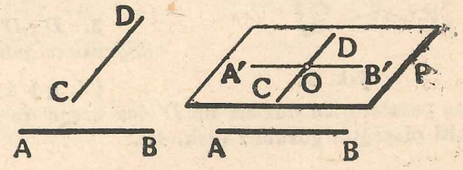
Şek. 31

27. Teorem. — Paralel iki doğrudan geçerek kesişen iki düzlemin arakesiti, o doğrulara paralel olur.

(Y. g.) D//L olsun (Şek. 31); L//(P) ve dolayısiyle L//Δ olur, niçin? (No. 21 ve 23).

28. Temel çizim (Teorem). — Aykırı iki doğrunun birinden geçmek ve diğerine paralel olmak üzere ancak bir düzlem çizilir, birden fazla çizilemez.

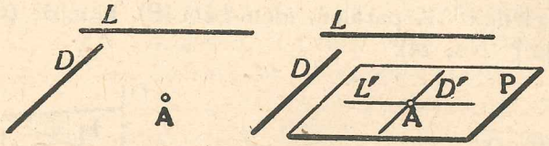
AB ve CD verilen iki aykırı doğru olsun (Şek. 32). CD nin üzerinde her hangi bir O noktası alalım ve bu noktadan AB ye A′B′ paralelini çizelim. A′B′ ile CD nin belirttiği (P) düzlemi AB doğrusuna paralel olur. CD nin her noktasından AB ye çizilen paralel doğrular, A′B′ ye de paralel olacağı için, (P) düzleminin içinde kalırlar. Öyleyse CD den geçen ve AB ye paralel olan ancak bir tane (P) düzlemi vardır.



Verilen Çizim
Şek. 32

29. Temel çizim (Teorem). — Verilen bir noktadan geçmek ve verilen aykırı iki doğruya paralel olmak üzere ancak bir düzlem çizilir, birden fazla çizilemez.

Verilen nokta A ve iki aykırı doğru D , L olsun (Şek. 33).

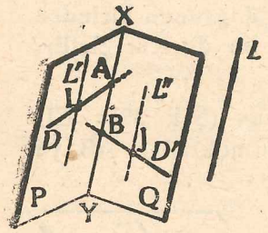


Verilen Çizim

Şek. 33

A dan geçen D ye paralel olan D' doğrusu ile L ye paralel L' doğrusunu çizelim. Bu D' ve L' doğrularının belirttiği (P) düzlemi, hem D ye hem de L ye paralel olur.

Bir noktadan bir doğruya ancak bir tane paralel çizilebileceği için bu D' ve L' doğruları birer tanedir. Dolayısiyle (P) düzlemi de bir tane olarak çizilir.



Şek. 34

PROBLEMLER

1. *Bir (P) düzlemi ile ona paralel D doğrusu arasında kalan paralel doğru parçaları birbirine eşittir. Niçin?*

(Y. g.) Paralel iki doğru parçasının belirttiği düzlemi düşününüz.

2. *D , D' aykırı doğrularını kesmek ve bir L doğrusuna paralel olmak üzere bir doğru çiziniz.*

(Y. ğ.) Aranılan doğrunun, D den geçen ve L ye paralel olan düzlem ile D' den geçen ve L ye paralel olan düzlemin arakesiti olacağını görünüz (Şek. 34).

3. *İki aykırı doğruyu kesen ve verilen iki düzleme paralel olan bir doğru çiziniz.*

(Y. g.) Aranılan doğrunun, verilen iki düzlemin arakesitine paralel olacağını görünüz.

4. *Bir uzay dörtgeninin kenarlarının orta noktalarının belirttiği düzlem, dörtgenin köşegenlerine paralel olur (Şek. 26). Niçin?*

5. *Birbirine paralel olan* AB, CD *doğruları ile bunların dışında bir* O *noktası veriliyor.* (OAB) , (OCD) *düzlemlerinin arakesiti hangi doğru olur?*

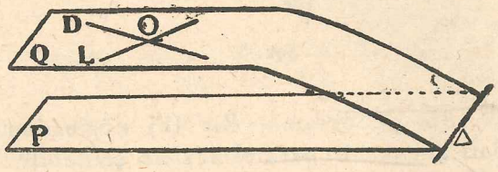
PARALEL DÜZLEMLER

30. Tanım. — İki düzlemin ortak noktaları yoksa, bu iki düzlem birbirine *paraleldir* denir.

31. Teorem. — Kesişen iki doğru bir (P) düzlemine paralel olursa, bunların tayin ettiği (Q) düzlemi de (P) ye paraleldir.

Hipotez: D ile L, O noktasında kesişen iki doğru ve D // (P), L // (P) ise (Şek. 35),

Hüküm: (Q) // (P) dir.

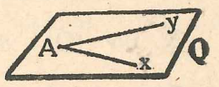


Şek. 35

İspat : (Q), (P) düzlemleri paralel olmasa, Δ gibi bir doğru boyunca kesişirler. Bu takdirde

$$\Delta // D \quad , \quad \Delta // L$$

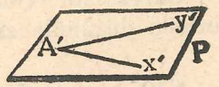
olmak gerekir. Buna göre O noktasından Δ doğrusuna paralel iki doğru çizilmiş olur. Bu, «No. 16» ya aykırıdır. Şu halde (Q) , (P) düzlemleri paraleldir.



32. Neticeler:

I. — Paralel iki düzlemden birinin içindeki her doğru, diğer düzleme paraleldir.

II. — Kenarları paralel olan xAy ve $x'A'y'$ açılarının tayin ettiği düzlemler birbirine paralel olur (Şek. 36).



Şek. 36

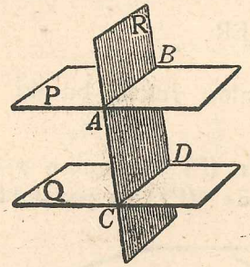
33. Önemli ihtar. — İki düzlemin paralel olduğunu göstermek için, bunlardan birinin içinde diğer düzleme paralel olmak üzere kesişen iki doğrunun bulunduğunu göstermek yeter.

Onun için «iki düzlemin paralel olduğunun gösterilmesini istiyen problemlerin çözümünde» bu ihtara göre hareket ediniz.

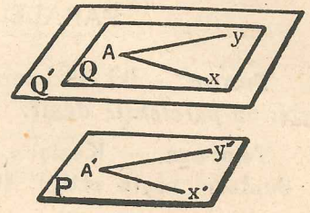
34. ***Önemli ödev.*** *— D , L gibi aykırı iki doğru veriliyor; biri D den, diğeri L den geçen ve birbirine paralel olan iki düzlem çiziniz. Ancak bir çizim vardır. Niçin?*

35. Teorem. — **Paralel iki düzlem üçüncü bir düzlemle kesilirse meydana gelen arakesitler birbirine paralel olur.**

(Y. g.) AB, CD doğruları (R) düzleminin içindedir (Şek. 37). Bu iki doğru birbirini kesemez, niçin ?



Şek. 37



Şek. 38

36. Teorem. — **Bir (P) düzlemine dışındaki bir A noktasından ancak bir paralel düzlem çizilebilir.**

İspatı: 1. (P) düzleminin içinde $A'x'$, $A'y'$ gibi kesişen iki doğru alınır ve

$$Ax \,//\, A'x' \quad , \quad Ay \,//\, A'y'$$

çizilirse Ax, Ay doğrularını belirttiği (Q) düzlemi (P) ye paralel olur.

2. Bu (Q) düzlemi tektir (Şek. 38).

Gerçekten, A dan geçen ve (P) ye paralel olan ikinci bir (Q') düzlemi düşünülecek olursa:

«No. 32 — I» gereğince $A'x'$, $A'y'$ doğruları hem (Q), hem de (Q') düzlemine paralel olur. Bu doğrulara paralel olan Ax, Ay doğruları da (Q), (Q') düzlemlerinin içinde bulunur (No. 24). Şu halde (Q), (Q') düzlemleri birbiriyle çakışır.

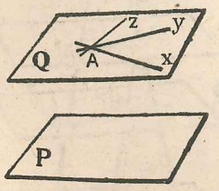
Bu teoremden derhal şu neticeler çıkarılır:

37. Neticeler:

I. Paralel iki düzlemden birini kesen bir düzlem diğerini de keser.

II. — Paralel iki düzlemden birine paralel olan bir düzlem diğerine de paraleldir.

38. Teorem. — **Bir (P) düzlemine dışındaki bir A noktasından çizilen paralel doğruların geometrik yeri, A dan geçen ve (P) düzlemine paralel olan bir düzlemdir.**



Şek. 39

İspatı (Şek. 39):

1. A noktasından (P) düzlemine paralel olarak çizilen Ax, Ay doğrularının belirttiği (Q) düzlemi (P) ye paraleldir (No. 31).

A noktasından (P) düzlemine paralel olarak çizilen diğer bütün doğrular, bu (Q) düzleminin içinde bulunurlar (No. 36).

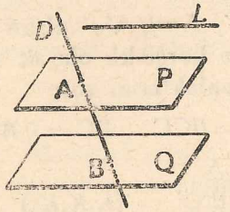
2. Karşıt olarak, (Q) düzleminin A noktasından geçen her hangi bir Az doğrusu, (P) düzlemine paralel olur (No. 32 — I).

39. Neticeler:

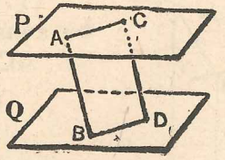
I. — Paralel iki düzlemden birini kesen doğru diğerini de keser.

İspatı: (P) // (Q) olsun (Şek. 40). (P) düzlemini A noktasında kesen D bir doğrusu, (Q) düzlemini kesmezse ona paralel olur. Bu takdirde tamamen (P) düzleminin içinde kalması gerekir (No. 38). Bu ise hipoteze aykırıdır. Şn halde D doğrusu (Q) düzlemini B gibi bir noktada keser.

II. — Paralel iki düzlemden birine paralel olan doğru diğerine de paraleldir (Şek. 40).



Şek. 40

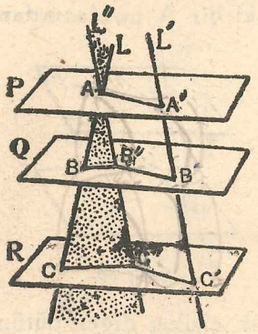


Şek. 41

40. Teorem. — **Paralel iki düzlem arasında kalan paralel dsğru parçaları birbirine eşittir** (Şek. 41).

(Y. g.) ABDC dörtgeninin bir paralelkenar olacağını görünüz.

41. Uzayda Tales teoremi. — Bir takım paralel düzlemler, kendilerini kesen her hangi iki doğru üzerinde karşılıklı orantılı parçalar ayırırlar.



L' doğrusu üzerindeki B yerine B' yazınız.
Şek. 42

İspatı: Birbirine paralel (P), (Q), (R) düzlemleri L, L' doğruları ile kesilmiş olsun (Şek. 42); A noktasından L' doğrusuna paralel L'' doğrusunu çizelim; şekle dikkat edilirse:

$$AB'' = A'B' \text{ ve } B''C'' = B'C' \text{ (No. 40)};$$

$$BB'' // CC'' \quad \text{(No. 35)}$$

olduğu görülür. CAC'' üçgenine Tales teoremi uygulanırsa:

$$\frac{AB}{AB''} = \frac{BC}{B''C''}$$

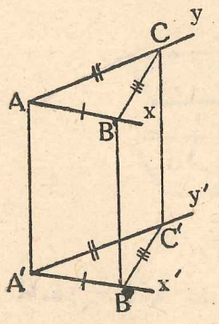
yazılır. AB'' ve B''C'' yerine eşitleri yazılırsa:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$ bulunmuş olur.

İhtar: AB = BC olursa, A'B' = B'C' olacağı aşikârdır.

KENARLARI PARALEL AÇILAR

42. Teorem. — Kenarları aynı yönde paralel olan açılar birbirine eşittir.



Şek. 43

(Y. g.) $Ax // A'x'$, $Ay // A'y'$ olsun (Şek. 43); bu kenarlar üzerinde karşılıklı olarak $AB = A'B'$ ve $AC = A'C'$ uzunluklarını alıp

$$BB' = //AA' = //CC' \text{ , } BC = // B'C'$$

$$\text{ve } \overset{\Delta}{ABC} = \overset{\Delta}{A'B'C'} \quad (K.K.K.)$$

olacağını görünüz. Buradan:

$$\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$$

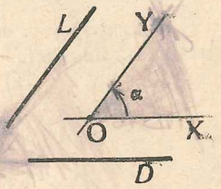
bulunur.

43. Neticeler:

I. — Kenarları ters yönde paralel olan açılar birbirine eşittir.

II. — Birer kenarları aynı yönde ve diğer kenarları ters yönde paralel olan iki açı bütünlerdir. (Ters yönde olan kenarlardan birinin uzantısını düşününüz.)

44. Aykırı iki doğru arasındaki açı. — Aykırı D, L doğruları arasındaki açı diye, uzayın bir O noktasından bu doğrulara paralel olarak çizilen OX ve OY doğruları arasındaki açıya denir (Şek. 44). Bu O noktası doğrulardan biri üzerinde de alınabilir.



Şek. 44

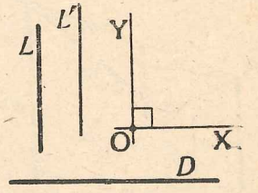
Bu XOY açısı, bir dik açı olursa, D, L doğrularına *dik durumlu doğrular* denir.

D, L gibi iki doğrunun dik veya dik durumlu olduğu, kısaca, $D \perp L$ yazılarak gösterilir.

Soru: D, L aykırı doğrularının arasındaki açı, O noktasının konumuna bağlı değildir. Niçin?

45. Teorem. — Paralel iki doğrudan birine dik durumlu olan bir doğru, diğerine de dik veya dik durumlu olur.

İspatı: $L // L'$ ve $L \perp D$ olsun (Şek. 45). $L' \perp D$ olduğunu göstereceğiz.



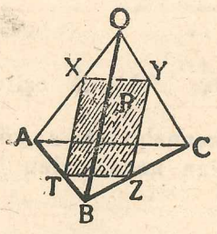
Şek. 45

Uzayda bir O noktası alalım ve

$$OX // D \text{ , } OY // L$$

çizelim. Meydana gelen XOY açısı, D ve L doğruları arasındaki açı olup diktir. Diğer taraftan, OY doğrusu, L nin paraleli olan L' ye de paraleldir. Öyleyse bu XOY dik açısı, aynı zamanda D ve L' doğruları arasındaki açı demektir. Yani

$L' \perp D$ olur.



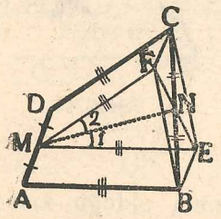
Şek. 46

II. BÖLÜM ÜZERİNE :

A) PROBLEMLER

1. *Bir* ABC *üçgeni ile bunun düzlemi dışında bir* O *noktası veriliyor.* OA *üzerinde alınan bir* X *noktasından* AC *ve* OB *ye paralel olmak üzere çizilen* (P) *düzlemi,* OC *yi* Y, BC *yi* Z *ve* AB *yi de* T *noktasında kestiğine göre* XYZT *dörtgeni bir paralelkenar olur. Niçin?*

(Y. g.) Şek. 46 da XY//AC, XT//OB alınarak (P) düzlemi meydana getirilmiştir. Niçin YZ//OB, TZ//AC olur ?



Şek. 47

2. (P), (Q) *düzlemlerinin arakesiti* D *dir.* (P) *ye paralel bir* (P′) *düzlemiyle,* (Q) *ye paralel bir* (Q′) *düzleminin arakesiti* D *doğrusuna paralel olur. Niçin?*

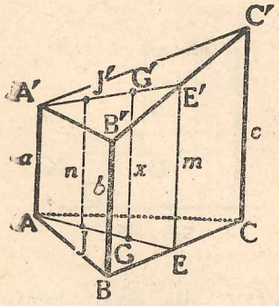
3. *Bir uzay* (veya düzlem) *dörtgende karşılıklı iki kenar eşit ise, bu iki kenar, diğer iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru ile eşit açılar teşkil eder* (Şek. 47). *Niçin?*

4 ABCDEF *uzay* (veya düzlem) *altıgeninde* AB *ile* DE *ve* BC *ile* EF *kenarları birbirine eşit ve ters yönde paralel ise:*

a) AD, BE, CF *köşegenleri birbirini orta noktalarında keserler;*

b) CD, FA *kenarları da birbirine eşit ve ters yönde paralel olurlar. Niçin?*

5. *Birbirine aynı yönde paralel olan* AA′, BB′, CC′ *gibi üç doğru parçası göz önüne alınıyor;* ABC, A′B′C′ *üçgenlerinin ağırlık merkezleri* G, G′ *olduğuna göre:*



Şek. 48

GG′ *doğru parçası, bu üç doğru parçasına paralel ve onların toplamlarının üçte birine eşit olur. Niçin?*

(Y. g.) BC nin ortası E, B′C′ nün ortası da E′ olsun (Şek. 48).

EE′ // BB′ ve GA = 2 GE, G′A′ = 2 G′E′, olacağını görünüz.

6. *Aynı düzlemde bulunmıyan* ABC, A′B′C′ *üçgenlerinin kenarları karşılıklı olarak paralel ise, karşılıklı köşeleri birleştiren* AA′, BB′ CC′ *doğruları, ya aynı bir noktadan geçer veya birbirine paralel olurlar. Niçin?*

B) GEOMETRİK YER PROBLEMLERİ

Bilgi. — Belirli bir şart altında hareket eden noktaların meydana getirdiği şekle, bu noktaların *geometrik yeri* denir. «Geometri Lise I» de, bir düzlem içindeki geometrik yer prolemlerinin nasıl çözüleceğini etraflıca görmüştük. Uzayda geometrik yer problemlerini çözerken de aynı şekilde hareket edilir. Öyle ki:

Geometrik yere ait olması gereken birkaç özel nokta göz önüne alıp, bu noktalardan geçebilecek olan çizgi veya yüzeyi çizeriz. Böylece geometrik yerin cinsini kestirir ve düşüncelerimizi o istikamette toplarız. Sonra çözüme başlarken:

1°. Geometrik yere ait (yani verilen şarta uyan) bir nokta M olsun deriz ve bu noktanın, şeklimizle ilgili hangi sabit çizgi veya yüzey üzerinde bulunabileceğini araırız.

2°. Karşıt olarak, bu çizgi veya yüzeyin her hangi bir M noktasının verilen şartı gerçekleyip gerçeklemediğini de gösteririz. Eğer, bu çizgi veya yüzeyin bir kısmındaki noktalar verilen şartı gerçeklemiyorsa, çizgi veya yüzeyin bu kısmı geometrik yere ait değildir deriz.

Uzayda hareket eden bir doğru, bir yüzey meydana getirdiği için uzay geometride, bazan, doğruların geometrik yeri de sorulur (No. 38 de olduğu gibi). Bu takdirde yine yukardaki şekilde hareket edilir.

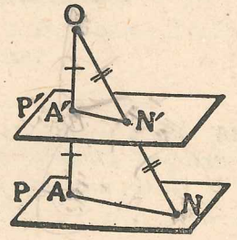
İhtar: Geometrik yerin cinsi hemen görülebiliyorsa, işi uzatmadan çözüme başlamalıdır.

Örnek olarak aşağıdaki problemi çözelim :

7. *Bir* (P) *düzlemi ile bunun dışında verilen bir* O *noktası arasında kalan doğru parçalarının orta noktalarının geometrik yeri nedir?*

1°. (P) düzlemidin içinde sabit bir nokta A, hareketli bir nokta N, OA nın ortası A′, ON nin ortası N′ olsun (Şek. 49). OAN üçgeninde A′N′//AN olduğundan A′N′//(P) olur (No. 21).

N noktası (P) düzleminin içinde hareket ettikçe A′N′ doğrusu daima (P) ye paralel olacaktır. Şu halde bu A′N′ doğruları, A′ den geçmek ve (P) ye paralel olmak üzere çizilen (P′) düzlemi nin içinde bulunurlar (No 38). Dolayısiyle N′ noktası da bu düzlemin içindedir. A′ noktası sabit olduğundan bu (P) düzlemi de sabit bir düzlemdir.



Şek. 49

2°. Karşıt olarak, (P′) düzlemi üzerindeki bir nokta N′ olsun; ON′ doğrusu (P) yi N de kestiğine göre, OA′ = A′A olduğundan ON′ = N′N olur. Şu halde N′ noktası verilen şartı gerçekler.

(P′) düzleminin tümü geometrik yerdir.

8. *Bir düzlemle dışındaki bir nokta arasında kalan doğru parçalarını* $\frac{2}{3}$ *oranında bölen noktaların geometrik yeri nedir?*

9. *İki paralel düzlem arasında kalan doğru parçalrının orta noktalarının geometrik yeri nedir?*

10. *Bir* (P) *düzlemi ile bunun içinde* A, B *noktaları ve düzlemin dışında bir* O *noktası veriliyor. Biri* OA *dan diğeri,* OB *den geçen ve* (P) *düzlemini paralel iki doğru boyunca kesen iki düzlemin* OX *arakesitlerinin geometrik yeri nedir?* [OX // (P) olacağını görünüz.]

B) ÇİZİM PROBLEMLERİ

11. *Bir düzlem ile, buna paralel bir doğru veriliyor. Bu doğrudan geçen ve düzleme paralel olan bir düzlem çiziniz. Kaç çizim vardır?*

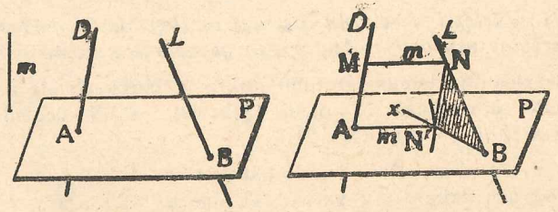
12. *Kesişen iki düzlemden biri içinde verilen bir* O *noktasından geçen ve bu düzlem içinde kalarak diğer düzleme paralel olan doğruyu çiziniz.*

13. *D ve D' doğruları birbirine paralel; K ve K' her hangi iki doğrudur. Bu dört doğruyu kesen bir doğru çiziniz*

14. *Bir* A *noktasından geçen, bir* (P) *düzlemine paralel olan ve bir D doğrusunu kesen bir doğru çiziniz.*

15. *Bir (P) düzlemini kesen D, L gibi aykırı iki doğru arasına, düzleme paralel ve uzunluğu* $MN = m$ *olan bir doğru parçası yerleştiriniz.*

(Y. g.) Şek. 50 de L den geçen ve D ye paralel olan düzlem çizilmiştir. Bunun (P) ile arakesiti Bx olsun; $AN' = m$, $N'N // D$ alınarak N noktası bulunmuştur.



Verilen Çizim

Şek. 50

16. *Bir* A *noktası ile bir* (P) *düzlemi ve bu düzleme paralel bir D doğrusu veriliyor.* A *dan geçen, D ve* (P) *yi kesen öyle bir doğru çiziniz ki bunun D ile* (P) *arasında kalan parçası verilen bir m uzunluğunda olsun.*

BÖLÜM III

DİK DOĞRU VE DÜZLEMLER

DOĞRUNUN DÜZLEME DİKLİĞİ

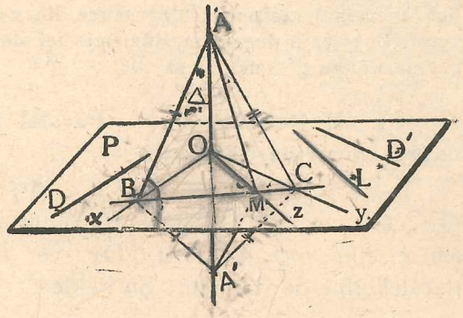
46. Tanım. — Bir doğru, bir düzlemin içindeki bütün doğrulara dik veya dik durumlu olursa, bu doğru düzleme *diktir* denir.

47. Teorem. — Bir doğru, bir düzlemin içinde bulunan ve paralel olmıyan iki doğruya dik veya dik durumlu olursa, düzleme de dik olur.

Hipotez: $\Delta \perp D, \Delta \perp D'$ ise (Şek. 51),

Hüküm : $\Delta \perp$ (P) dir.

İspat : Δ doğrusunun, (P) düzlemi içindeki her hangi bir L doğrusuna da dik durumlu olduğunu gösterelim:



Şek. 51

Δ doğrusunun düzlemi kestiği O noktasından D, D', L doğrularına sıra ile Ox, Oy, Oz paralellerini çizelim;

$\Delta \perp Ox$, $\Delta \perp Oy$ olur (No. 45).

(P) düzleminin içinde Ox, Oy, Oz doğrularını B, C, M noktalarında kesen bir doğru çizelim; Δ doğrusu üzerinde $OA = OA'$ alarak, Bu A, A' noktalarını B, C, M noktaları ile birleştirelim; BAA', CAA' ikizkenar üçgenlerinde [*]:

$$BA = BA' \quad \text{ve} \quad CA = CA'$$

olur. Şu halde BAC, A'BC üçgenleri birbirine eşittir (*K.K.K.*). Buradan:

$$\overset{\frown}{ABM} = \overset{\frown}{A'BM} \quad \text{ve nihayet} \quad \overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{A'BM} \quad (K.A.K)$$

[*] Bir köşeden geçen kenarortayı ile yüksekliği aynı olan üçgen ikizkenardır.

olduğu bulunur. Bu eşitlikten, MA = MA′ olduğu anlaşılır. Bu MAA′ ikizkenar üçgeninde tepeden geçen kenarortay tabana dik olacağından

$$\Delta \perp Oz$$

olur. Şu halde $\Delta \perp L$ dir (No. 45).

Benzer tarzda hareket ederek, Δ doğrusunun (P) düzlemi içindeki bütün doğrulara dik durumlu olacağı gösterilebileceğinden

$$\Delta \perp (P)$$

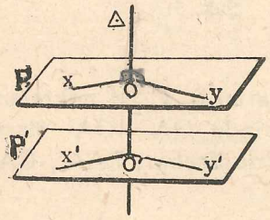
bulunur.

Önemli ihtar. — Bu teoremden anlaşılır ki:

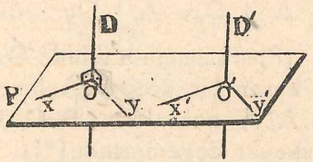
Bir doğrunun bir düzleme dikliğini göstermek gerektiği zaman, bu doğrunun, düzlemin kesişen iki doğrusuna dik veya dik durumlu olduğunu göstermek yeter. Böylece o doğrunun, düzlemin içindeki bütün doğrulara dik veya dik durumlu olduğu gösterilmiş sayılır.

48. Neticeler: I. — Paralel iki düzlemden birine dik olan doğru, diğerine de diktir.

İspatı: (P) // (P′) ve $\Delta \perp (P)$ olsun (Şek. 52). (P) içinde Ox, Oy ve (P′) içinde de bunlara paralel $O'x'$, $O'y'$ doğrularını çizelim. Δ doğrusu, Ox ve Oy ye dik olacağı için bunların paralellerine de dik olur. Şu halde $\Delta \perp (P')$ dür.



Şek. 52



Şek. 53

II. — Paralel iki doğrudan birine dik olan düzlem, diğerine de diktir.

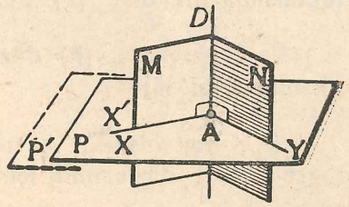
Yol gösterme: D // D′ ve $D \perp (P)$ olsun (Şek. 53). $O'x' // Ox$ ve $O'y' // Oy$ **çizerek düşününüz.**

49. Temel çizim (Teorem). — Verilen bir noktadan geçmek ve verilen bir doğruya dik olmak üzere ancak bir düzlem çizilebilir; birden fazla çizilemez.

Verilen noktaya A ve doğruya D diyelim. İki hal düşünebiliriz:

1. hal: A *noktası* D *doğrusunun üzerinde olsun* (Şek. 54).

D doğrusundan geçen (M) ve (N) gibi her hangi iki düzlem ele alalım. A noktasından D doğrusuna (M) düzlemi içinde AX ve (N) düzlemi içinde AY dikmelerini çizelim. Bu AX ve AY doğrularının belirttiği (P) düzlemi D doğrusuna dik olur.

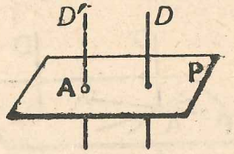


Şek. 54

Burada, keyfî olarak alınan (M) ve (N) düzlemlerinden başka düzlemler kullanılsa bile, A noktasında D doğrusuna dik olan (P) den başka düzlem elde edilemez, hep aynı (P) düzlemi elde edilir.

Gerçekten, bir an için, A dan D doğrusuna dik ikinci bir (P′) düzleminin çizileceğini düşünürsek, bu düzlemin (M) düzlemiyle arakesiti, A dan geçen ve D ye dik olan AX′ gibi bir doğru olacaktır. Çünkü D doğrusu (P′) düzlemine dik olunca onun içindeki AX′ doğrusuna da dik olur. Halbuki daha önce aynı (M) düzleminin içinde $D \perp AX$ idi. Bir düzlem içinde bir noktadan bir doğruya birden fazla dikme çizilemiyeceğinden (P′) düzlemi (P) ile çakışmaya mecburdur.

2. hal: A *noktası* D *doğrusunun dışında olsun* (Şek. 55).

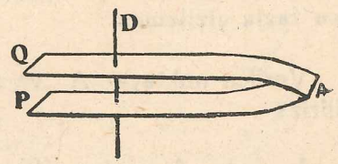


Şek. 55

Bu halde, önce, A dan geçen ve D ye paralel olan D' doğrusu çizilir. Sonra yukardaki yol ile A dan D' doğrusuna dik bir (P) düzlemi çizilir. Bu düzlem, D' nün paralel olan D ye de dik olur ve bir tanedir.

50. Netice. — Bir doğruya dik olan iki düzlem birbirine paralel olur.

(Y. g.) Bu iki düzlem kesişecek olsa, arakesit üzerindeki bir A noktasından D doğrusuna kaç tane dik düzlem çizilmiş olur (Şek. 56)?



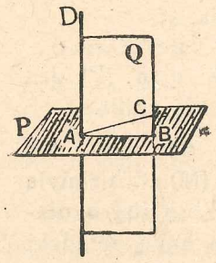
Şek 56

51. Teorem. — Bir noktadan bir doğruya dik veya dik durumlu olmak üzere çizilen doğruların geometrik yeri, bu noktadan bu doğruya çizilen dik düzlemdir.

İspatı: 1. hal: *Nokta, doğrunun üzerindedir.* — D doğrusuna A noktasında dik olan (P) düzlemini çizelim (Şek. 57).

1°. D doğrusu, (P) düzleminin A dan geçen bütün doğrularına dik olur (No. 46).

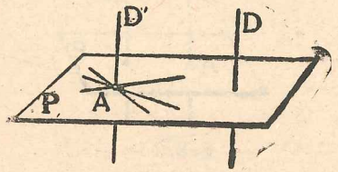
2°. Karşıt olarak, A noktasında D doğrusuna dik olan bütün doğrular (P) düzleminin içinde bulunurlar.



Şek. 57

Gerçekten, D ye dik olan bir AC doğrusunun (P) düzleminde bulunmadığını farzedelim; AC ile D nin belirttiği (Q) düzleminin (P) düzlemiyle AB gibi bir arakesiti vardır; bu arakesit, A noktasında D doğrusuna dik olur. Bu takdirde, (Q) düzleminin içinde D doğrusuna AB ve AC gibi iki dikme çizilmiş olur: Bu ise mümkün değildir.

2. hal: *Nokta, doğrunun dışındadır.* — A noktasından D doğrusuna D′ paralelini çizelim. (Şek. 58); D′ doğrusuna A noktasında dik olan her doğru, D doğrusuna dik durumlu olur. Bütün bu dikmeler, A noktasında D′ doğrusuna dik olan bir düzlem içinde bulunurlar (1. hal). Bu düzlem, D doğrusuna da diktir.



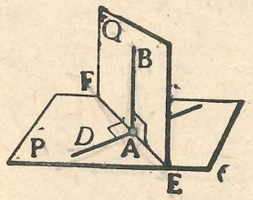
Şek. 58

52. Temel çizim (Teorem). — Verilen bir noktadan geçmek ve verilen bir düzleme dik olmak üzere ancak bir doğru çizilebilir, birden fazla çizilemez.

Verilen noktaya A ve düzleme (P) diyelim. İki hal düşünebiliriz:

1. hal: A *noktası* (P) *düzleminin içinde olsun* (Şek. 59).

(P) düzlemi içinde A dan geçen her hangi bir *D* doğrusu alalım ve A noktasında bu doğruya dik olan (Q) düzlemini «No. 49» daki metotla çizelim. Bu düzlemin (P) ile arakesiti, A dan geçen EF gibi bir doğrudur. Şimdi (Q) düzlemi içinde A noktasından EF doğrusuna AB dikmesini çizelim. Bu AB doğrusu (P) düzlemine dik olur. Çünkü:

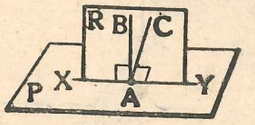


Şek. 59

(Q) düzlemi *D* doğrusuna dik olarak alındığından (Q) nün içindeki AB doğrusu da *D* ye dik olur. Şu halde AB doğrusu, (P) düzleminin *D* ve EF gibi kesişen iki doğrusuna dik olmaktadır. Öyleyse AB doğrusu (P) düzlemine dik olur.

Şimdi iddia ediyoruz ki A noktasından (P) düzlemine AB den başka ikinci bir dikme çizilemez.

Gerçekten, bir an için, AB den başka (P) ye dik olan ikinci bir AC doğrusu düşünülürse, AC ile AB bir (R) düzlemi belirtir (Şek. 60). Bu (R) düzleminin (P) ile arakesiti A dan geçen XY gibi bir doğru olur ve



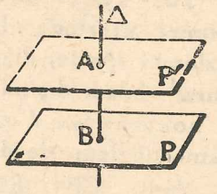
Şek. 60

$$AB \perp XY \ , \quad AC \perp XY$$

olmak gerekir. Çünkü AB ve AC nin her ikisi de (P) ye dik olunca, (P) nin içindeki XY doğrusuna da dik olurlar. Halbuki aynı (R) düzleminin içinde XY doğrusuna A noktasından iki dikme çizilemez. O halde ikinci AC dikmesi mevcut olamaz.

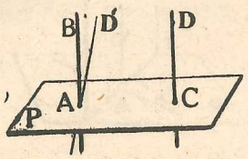
2. hal: A *noktası* (P) *düzleminin dışında olsun* (Şek. 61).

Bu halde A dan geçen ve (P) ye paralel olan bir (P′) düzlemi alınır. Sonra (P′) ye A noktasında dik olan Δ doğrusu çizilir. Bu doğru (P) ye de dik olur. Bu dikmenin bir tane olacağı aşikârdır.



Şek. 61

53. Netice. — **Bir düzleme dik olan iki doğru birbirine paralel olur.**



Şek. 62

(Y. g.) AB ⊥ (P), CD ⊥ (P) olsun (Şek 62); AD'//CD çizerek AD' ile AB nin çakışacağını görünüz.

Sorular:

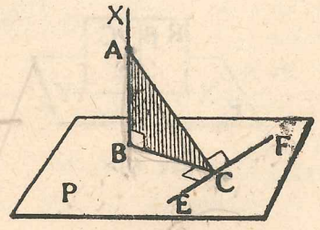
1. Bir düzleme dik olan bir doğru, bu düzleme paralel olan her doğruya dik yahut dik durumlu olur. Niçin?

2. Aynı doğruya dik olan bir doğru ile bir düzlem, birbirine paralel olur. Niçin?

3. Bir *D* doğrusunun bütün noktalarından bir düzleme çizilen dikmeler *D* doğrusu ile aynı düzlem içinde bulunurlar. Niçin?

ÜÇ DİKME TEOREMLERİ

54. Teorem. 1°. — **Bir (P) düzlemi ile bunun içindeki bir EF doğrusuna düzlem dışındaki bir A noktasından birer dikme çizilse, iki dikme ayağını birleştiren doğru, düzlemin içindeki EF doğrusuna dik olur.**



Şek. 63

Yani AB ⊥ (P) ve AC ⊥ EF ise BC ⊥ EF dir (Şek. 63).

55. Teorem. 2°. — **Bir (P) düzleminin dışında alınan bir A noktasından düzleme dikme indirilse, sonra dikme ayağından düzlemin içindeki bir EF doğrusuna dikme çizilse, bu ikinci dikme ayağını düzlem dışındaki A noktasına birleştiren doğru, düzlem içindeki EF doğrusuna dik olur.**

Yani AB ⊥ (P) ve BC ⊥ EF ise CA ⊥ EF dir (Şek. 63).

56. Teorem. 3°. — **Bir (P) düzleminin içindeki bir EF doğrusunun üzerinde alınan bir C noktasından bu doğruya, biri bu düzlemin içinde, diğeri dışında olmak üzere iki dikme çizilse ve sonra düzlem dışında çizilen dikme üzerinde alınan her hangi bir A noktasından düzlem içindeki dikmeye bir dikme indirilse, bu dikme düzleme de dik olur.**

Yani CB ⊥ EF , CA ⊥ EF ve AB ⊥ CB ise AB ⊥ (P) dir (Şek. 63).

Yol gösterme: Bu teoremlerin her birinde EF doğrusunun (ABC) düzlemine dik olacağı gösterilerek ispat yapılır.

Dikkat: Bu üç teoremin pek çok tatbikatı vardır; iyice ezberleyiniz.

DİKME VE EĞİKLER

57. Tanım. — Bir doğru bir düzlemi dik olmıyarak keserse, bu doğruya *eğik* denir.

Doğru ile düzlemin ortak noktasına *eğik ayağı* adı verilir.

58. Teorem. — **Bir düzlemin dışında alınan bir noktadan bu düzleme bir dikme ile birtakım eğikler çizilse:**

1°. Dikme eğiklerin hepsinden kısadır.

2°. Ayakları, dikme ayağından eşit uzaklıkta bulunan eğikler birbirine eşittir.

3°. Ayağı dikme ayağından en uzakta bulunan eğik en uzundur.

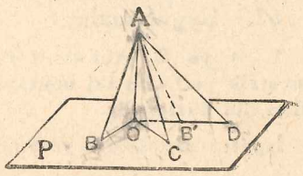
İspatı: 1°. AO ⊥ (P) olsun (Şek. 64); AOB, AOC, AOD,... dik üçgenlerinde AO dik kenarı, AB, AC, AD,... hipotenüslerinin herbirinden kısa olur.

2°. OB = OC olsun; AOB, AOC dik üçgenleri eşit olacağından (*K.A.K.*)

AB = AC

olur.

3°. OD > OB olsun; OD üzerinde OB' = OB alınırsa AB = AB' olur. AOB' dik üçgeninde AB'D dış açısı geniş açı olacağından, AB'D üçgeninde AD > AB' olur. Şu halde AD > AB dir.



Şek. 64

59. Karşıt teorem. — **Bir düzlemin bütün noktaları, düzlem dışındaki bir noktaya birleştirilirse:**

1°. Bu doğru parçaları arasında en küçük olanı düzleme diktir.

2°. Birbirine eşit eğiklerin ayakları, dikme ayağından aynı uzaklıktadır.

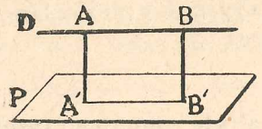
3°. En büyük eğiğin ayağı, dikme ayağına en uzakta bulunur.

(Y. g.) İspatı, olmıyana ergi metodu ile yapınız.

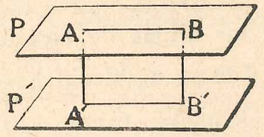
60. Tanımlar:

1°. Bir noktanın bir düzleme uzaklığı. — Bir noktanın bir düzleme uzaklığı diye, bu noktadan bu düzleme indirilen dikmenin uzunluğuna denir.

2°. Bir doğrunun kendisine paralel olan bir düzleme uzaklığı.— D//(P) olsun (Şek. 65); D doğrusunun her hangi bir noktasının (P) düzlemine olan uzaklığına, D doğrusunun (P) düzlemine *uzaklığı* denir. Zira, bu D doğrusunun her noktasından (P) düzlemine çizilen dikmelerin boyları eşit olur (AA′ = BB′).



Şek. 65



Şek. 66

3°. Paralel iki düzlemin uzaklığı. — Paralel iki düzlemden birinin içindeki bir noktanın diğer düzleme olan uzaklığına, bu iki düzlemin *uzaklığı* denir. Zira, bu düzlemlerden birinin üzerindeki her noktadan diğerine indirilen dikmelerin boyları eşittir (AA′ = BB′ Şek. 66).

61. Uygulamalar:

1. A ve B gibi sabit iki noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasına orta noktasından çizilen dik düzlemdir.

İspatı: Geometrik yere ait bir nokta M olsun (Şek. 67);

$$MA = MB$$

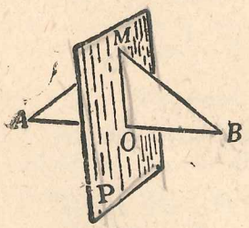
dir. MAB ikizkenar üçgeninde, daima,

$$MO \perp AB$$

olacağından OM doğrularının geometrik yeri, AB ye O orta noktasından çizilen dik düzlemdir (No. 51).

Bu düzlem, aynı zamanda, M noktasının da geometrik yeridir.

Bu düzleme, AB doğru parçasının *orta dikme düzlemi* denir.



Şek. 67

2. A, B, C gibi sabit üç noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu üç noktadan geçen çemberin merkezinden çember düzlemine çıkılan dik doğrudur.

İspatı: 1°. Geometrik yere ait bir nokta M olsun (Şek. 68):

$$MA = MB = MC$$

dir. $MO \perp (P)$ çizelim;

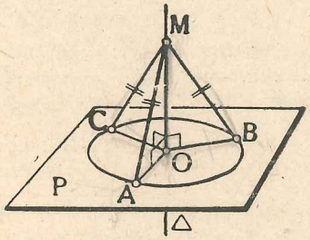
$$OA = OB = OC$$

olur (No. 59—2°). Şu halde bu O noktası, (ABC) çemberinin merkezidir ve MO dikmesi sabit bir doğrudur.

2°. Karşıt olarak, (ABC) dairesine O merkezinden çıkılan dikme üzerinde alınan her hangi bir nokta M olsun;

$OA = OB = OC$ olduğundan $MA = MB = MC$

olur (No. 58 - 2°). Şu halde bu M noktası verilen şartı gerçekler.



Şek. 68

OM doğrusunun tümü, geometrik yerdir.

3. Bir AB doğru parçasının O orta noktasından geçen her hangi bir (P) düzlemine, bu doğru parçasının A ve B uclarından indirilen dikmeler aynı uzunluktadır. Niçin?

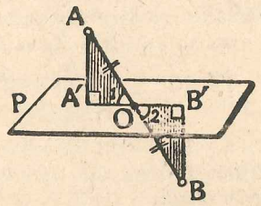
İspatı: $AA' \perp (P)$, $BB' \perp (P)$ olsun (Şek. 69);

$$AA' \parallel BB'$$

olur (No. 53) AA′ ile BB′nün belirttiği düzlemin (P) düzlemiyle olan A′B′ arakesit doğrusu O noktasından geçer AA′O , BB′O diküçgenlerinin (*K.A.A.*) teoremine göre eşitliğinden

$$AA' = BB'$$

bulunur.

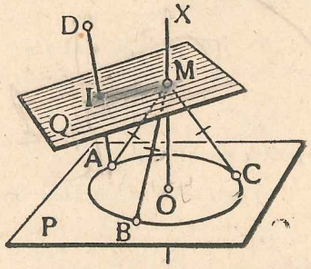


Şek. 69

4. Aynı düzlem içinde bulunmıyan A, B, C, D gibi dört noktadan eşit uzaklıkta bulunan bir nokta bulunuz. Bu nokta bir tanedir. Niçin?

Çözüm: Aranılan nokta, A, B, C noktalarından geçen çemberin O merkezinden (P) düzlemine çıkılan OX dikmesi ile AD doğru parçasının (Q) orta dikme düzleminin kesim noktasıdır (Şek. 70).

OX doğrusu, (Q) düzlemine paralel olamaz. Çünkü paralel olursa, $Ox \perp AD$ olması ve dolayısiyle AD nin (P) düzleminde bulunması gerektir. Bu, hipoteze aykırı olduğundan OX ile (Q), bir M noktasında kesişir.



Şek. 70

III. BÖLÜM ÜZERİNE:

A) PROBLEMLER

1. *Bir kenarı $a = 6$ cm olan bir eşkenar üçgenin* O *merkezinden üçgen düzlemine çıkılan dikme üzerinde* $OS = 2$ *cm uzunluğu alınıyor.* S *noktasının, üçgenin köşelerine olan uzaklıklarını bulunuz.*

2. A *ve* B *noktaları, aynı bir düzleme sıra ile* a *ve* b *kadar uzaklıktadır. Bunların dikme ayaklarının uzaklığı* c *kadardır.*

A *ve* B *noktaları, düzlemin aynı veya farklı taraflarında bulunduğuna göre,* AB *uzaklığını hesaplayınız.*

(Uygulama: $a = 7$ cm, $b = 2$ cm, $c = 12$ cm)

Cevap: AB = 13 cm veya AB = 15 cm olur.

3. *Bir* ABC *ikizkenar üçgeninde* $AB = AC = 2b$, $\widehat{A} = 120°$ *dir.* A *dan* (ABC) *düzlemine çıkılan dikme üzerinde,* $AN = x$ *olmak üzere, bir* N *noktası alınıyor.* x *ne olmalıdır ki* BNC *açısı dik açı olsun? (Cevap:* $x = b\sqrt{2}$*)*

(Y.g.) BC nin ortası O olsun; $NO = \frac{BC}{2}$ olacağını görünüz.

4. *Bir* (O) *çemberi ile bunun düzlemi dışında bir* A *noktası veriliyor;* A *noktasını çember üzerindeki noktalara birleştiren doğru parçaları arasında en kısa ve en uzun olanı hangisidir?*

(Y.g.) A dan çember düzlemine AA′ dikmesini çizerek, çemberin A′ ye en yakın ve en uzak olan noktalarını göz önüne alınız.

5. *Bir* (P) *düzlemiyle bunun aynı tarafında bulunan* A, B *noktaları veriliyor. Düzlem üzerinde öyle bir* M *noktası bulunuz ki* MA + MB *toplamı en küçük olsun.*

(Y.g.) A noktasının (P) düzlemine göre simetriğini alarak düşününüz [*].

6. *Bir* (P) *düzlemi ile bunun aynı tarafında bulunan* A, B *noktaları veriliyor. Düzlem üzerinde öyle bir* M *noktası bulunuz ki* $|MA - MB|$ *farkı en büyük olsun.*

7. *Bir* (P) *düzlemi ile* A *ve* B *gibi her hangi iki nokta veriliyor. Düzlem üzerinde öyle bir* M *noktası bulunuz ki:*

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$$

toplamı en küçük olsun.

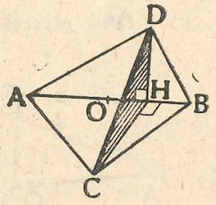
(Y.g.) AB nin ortası O olsun; niçin OM en küçük değerini almalıdır?

[*] Bir A noktasından bir (P) düzlemine indirilen AO dikmesini kendisi kadar uzatmakta bulunan A′ noktası, A noktasının (P) düzlemine göre simetriği olur.

8. *Uzayda, dik durumlu* AB, CD *gibi iki doğru parçası veriliyor;*

$$\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{DA}^2 - \overline{DB}^2$$

olduğunu gösteriniz.



Şek. 71

(Y.g.) D noktasından AB ye DH dikmesini çiziniz. CH , AB ye dik olur; niçin? Sonra istenen eşitliğin her iki tarafının

$$\overline{HA}^2 - \overline{HB}^2$$

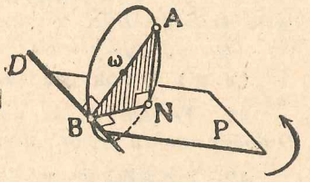
ye eşit olacağını görünüz (Şek. 71).

B) GEOMETRİK YER PROBLEMLERİ

9. *Verilen bir* (P) *düzleminden bilinen bir* a *uzaklığında bulunan noktaların geometrik yeri nedir?*

10. *Bir* (P) *düzleminden belli bir* a *uzaklığında olan ve verilen bir* (Q) *düzleminin içinde bulunan* M *noktasının geometrik yeri nedir?*

11. *Bir* D *doğrusu ile bunun dışında bir* A *noktası veriliyor.* D *doğrusundan geçen her hangi bir düzlem bu doğru etrafında dönmektedir.* A *noktasından bu düzleme çizilen dikmenin ayağının geometrik yeri nedir?*

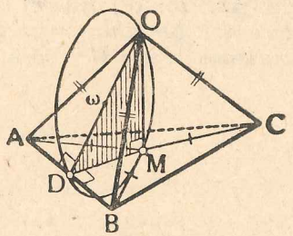


Şek. 72

(Y.g.) A dan D doğrusuna AB dikmesini çizerek düşününüz (Şek. 72).

12. *Bir* (P) *düzlemi ile bunun içinde bir* B *noktası ve dışında bir* A *noktası veriliyor. Düzlem içinde* B *noktası etrafında dönen* BX *doğrusuna* A *noktasından indirilen dikmenin ayağının geometrik yeri nedir?*

13. *Birbirine eşit* OA, OB, OC *doğru parçaları veriliyor* (Şek. 73).



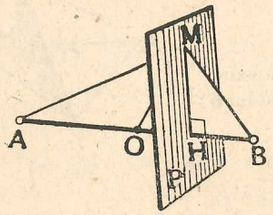
Şek. 73

a) A, B, C *noktalarından daima bir çember geçer. Niçin?*

b) OA *ile* OB *sabit kalıp,* OC *mümkün olan bütün doğrultuları aldığına göre* (ABC) *çemberinin merkezinin geometrik yeri nedir?*

14. *Bir* (P) *düzlemi ile dışında* A, B *noktaları veriliyor.* AB *yi dik açı ile gören ve* (P) *düzleminin içinde bulunan* M *noktasının geometrik yeri nedir?*

(Y. g.) AB nin ortası O olsun; $MO = \frac{AB}{2}$ olacağını görünüz ve $OO' \perp (P)$ çizerek düşününüz.



Şek. 74

15. *A ve B gibi sabit iki noktaya olan uzaklıklarının karelerinin farkı, sabit bir k^2 değerinde olan M noktasının geometrik yeri nedir?*

(Y. g.) AB nin ortası O olsun (Şek. 74); $MH \perp AB$ çizerek, H noktasının sabit kalacağını görünüz. $\left(OH = \frac{k^2}{2\,AB}\right)$ olur. Şu halde aranılan geometrik yer, AB doğrusuna H noktasında dik olan bir düzlemdir (No. 51).

C) ÇİZİM PROBLEMLERİ

16. *B ve C gibi iki nokta ve bunlarla aynı düzlemde bulunmıyan bir L doğrusu veriliyor. L doğrusu üzerinde öyle bir A noktası bulunuz ki ABC üçgeni ikizkenar olsun.*

(Y. g.) BC nin orta dikme düzlemini göz önüne alınız.

17. *Bir (P) düzlemi ile bunun içinde bir O noktası ve dışında bir D doğrusu veriliyor. Düzlem içinde kalmak ve O dan geçmek üzere D doğrusuna dik olan doğruyu çiziniz.*

(Y. g.) O noktasından *D* ye çizilen dik düzlemi göz önüne alınız.

18. *Verilen A, B noktalarından eşit uzaklıkta bulunmak ve verilen bir D doğrusundan geçmek üzere bir düzlem çiziniz. Kaç çizim var?*

19. *Bir ABC üçgeni ile bunun düzlemi dışında bir O noktası veriliyor. O noktasından geçmek ve üçgenin A, B, C köşelerinden eşit uzaklıkta bulunmak üzere bir düzlem çiziniz. Kaç çizim vardır?*

20. *Aynı düzlemde bulunmıyan A, B, C noktalarından eşit uzaklıkta bulunan bir düzlem çiziniz. Kaç çizim vardır?*

21. *Bir (P) düzlemi ile bunun içinde bir O noklası ve dışında bir A noktası veriliyor. Düzlem içinde O dan geçmek ve A dan belli bir m uzaklığında bulunmak üzere bir doğru çiziniz.*

BÖLÜM IV

İKİ DÜZLEMLİ AÇILAR VE DİK DÜZLEMLER

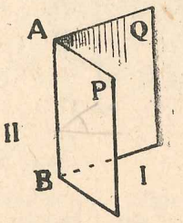
İKİDÜZLEMLİ AÇILAR

62. Tanım. — Bir doğrudan geçen iki yarım düzlemin meydana getirdiği şekle *ikidüzlemli açı* veya *ikiyüzlü açı* denir.

Şek. 75 de AB doğrusundan geçen (P), (Q) yarım düzlemlerinin meydana getirdiği ikidüzlemli bir açı görülmektedir.

(P), (Q) yarım düzlemlerine ikidüzlemli açının *yüzleri*, AB doğrusuna da bu ikidüzlemli açının *ayrıtı* denir. Şekildeki ikidüzlemli açıyı:

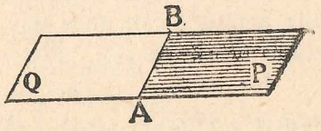
«(P, AB, Q) ikidüzlemli açısı» veya «(P, Q) ikidüzlemli açısı» yahut «(AB) ikidüzlemli açısı» diye yazar ve okuruz.



Şek. 75

Bir ikidüzlemli açı uzayı iki bölgeye ayırır: biri, iki yarım düzlemin arasında kalan bölge; diğeri dışta kalan bölgedir. Birinciye *iç bölge*, ikinciye *dış bölge* denir.

İkidüzlemli bir açının yüzleri birbirinin uzantısı durumunda olursa, bu ikidüzlemli açıya *düz ikidüzlemli açı* denir (Şek. 76).

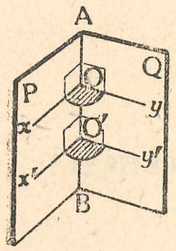


Şek. 76

63. İkidüzlemli açıların eşitliği. — Ayrıtları ve birer yüzleri üst üste getirildiğinde diğer yüzleri de üst üste gelirse, bu ikidüzlemli açılara *eşit ikidüzlemli açılar* denir.

64. İkidüzlemli açının ölçek açısı. — Bir (P, AB, Q) ikiyüzlü açısının AB ayrıtı üzerindeki bir O noktasından, bu ayrıta, (P) yüzünde Ox dikmesi ve (Q) yüzünde Oy dikmesi çizilirse, elde edilen xOy açısına bu ikiyüzlü açının *ölçek açısı* denir (Şek. 77).

Bu tanımdan anlaşılır ki: bir ikidüzlemli açının ayrıtına dik olarak çizilen bir düzlemin, açının yüzleriyle meydana getirdiği arakesitler arasındaki açı, bu ikidüzlemli açının *ölçek açısı* olur.



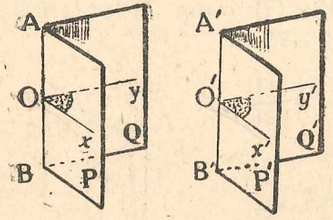
Şek. 77

Bir ikizdüzlemli açının bütün ölçek açıları birbirine eşittir.

Çünkü bunlar, kenarları aynı yönde paralel açılar olurlar.

65. Teorem. — Birbirine eşit olan ikidüzlemli iki açının ölçek açıları da birbirine eşit olur.

(Y.g) Bu ikidüzlemli açılar, O, O′ noktaları çakışacak şekilde üst üste konulduğunda xOy, $x'O'y'$ açılarının da üst üste geleceğini görünüz (Şek. 78).



Şek. 78

66. Karşıt teorem. — Ölçek açıları eşit olan ikidüzlemli iki açı birbirine eşittir.

(Y.g.) xOy, $x'O'y'$ açıları üst üste konulduğunda AB ile A′B′ de üst üste gelir, niçin? Şu halde bu ikidüzlemli iki açı üst üste gelmiş olur (Şek. 78).

67. İkidüzlemli açıların çeşitleri. — Ölçek açısı bir birim olan ikidüzlemli bir açıyı, ikidüzlemli birim açı olarak kabul edersek, her hangi bir ikidüzlemli açının bu birim cinsinden ölçümü, kendi ölçek açısının ölçümüne eşit olur. Meselâ, ölçek açısı 45° olan ikidüzlemli bir açının kendisi de 45° ile gösterilir. Onun için, ikidüzlemli bir açının ölçek açısı dar, dik veya geniş açı olduğuna göre bu ikidüzlemli açıya *dar*, *dik* veya *geniş ikidüzlemli açı* denir.

İkidüzlemli iki açıya, ölçek açılarının konumuna göre: *komşu*, *tümler*, *bütünler*, *ters*,... ikidüzlemli açılar diyebiliriz.

Not: İkidüzlemli iki açıyı toplamak veya çıkarmak için, bunların ölçek açılarını toplanacak veya çıkarılacak duruma getirmelidir.

Sorular:

1. Komşu ikidüzlemli iki açının ortak olmıyan yüzleri birbirinin uzantısı durumunda olursa, bu iki açı bütünlerdir. Niçin?

Bunun karşıtını da ispatlayınız.

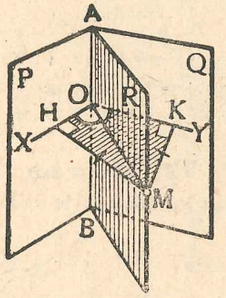
2. Birbirinin tersi olan ikidüzlemli iki açı birbirine eşittir. Niçin?

3. Bir doğru etrafında birbiri ardınca teşkil edilen bütün ikidüzlemli açıların toplamı dört dik açıya eşittir. Niçin?

68. İkidüzlemli açının açıortay düzlemi. — İkidüzlemli bir açının ayrıtından geçen ve bu açıyı iki eşit kısma ayıran düzleme, ikidüzlemli açının *açıortay düzlemi* denir.

69. Teorem. — İkidüzlemli bir açının yüzlerinden eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri, bu açının açıortay düzlemidir.

İspatı: (P, AB, Q) ikidüzlemli açısının içinde her hangi bir M noktası alalım ve bu noktadan AB ayrıtına dik bir düzlem çizelim. Bu düzlemle ikiyüzlü açının kesiti XOY olsun (Şek. 79). M den OX ve OY ye MH ve MK dikmelerini indirelim. Çizim sebebiyle AB ayrıtı, OX, OY, OM ye dik ve MH, MK ye de dik durumlu olur. Şu halde XOY açısı, bu ikiyüzlü açının ölçek açısıdır. Ayrıca



Şek. 79

$$MH \perp (P) \quad \text{ve} \quad MK \perp (Q)$$

olur. Demek ki M nin (P) ve (Q) yüzlerine olan uzaklıkları, XOY ölçek açısının kenarlarına olan uzaklıklarından ibarettir.

Öyleyse

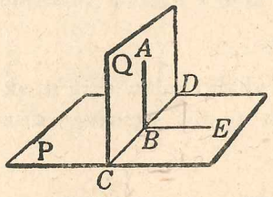
$$MH = MK$$

olması için OM nin XOY ölçek açısını ortalaması gerektir ve yeter. Yani AB ile M nin belirttiği (R) düzleminin (P, AB, Q) ikiyüzlü açısının açıortay düzlemi olması gerektir ve yeter.

DİK DÜZLEMLER

70. Tanım. — Kesişen iki düzlem dört tane ikidüzlemli açı meydana getirir; bunlardan birisi dik ise, bu iki düzleme *dik düzlemler* denir.

71. Teorem. — **Bir AB doğrusu bir (P) düzlemine dik olursa, AB den geçen her düzlem (P) düzlemine dik olur.**



Şek. 80

İspatı: AB den geçen her hangi bir (Q) düzlemi ile (P) nin arakesiti CD olsun (Şek. 80); (P) düzlemi içinde CD ye BE dikmesini çizelim; AB, (P) düzlemine dik olduğundan CD, BE doğrularına da dik olur. Şu halde ABE açısı, bir dik açıdır. Bu açı, (P, CD, Q) ikidüzlemli açısının ölçek açısı olduğundan:

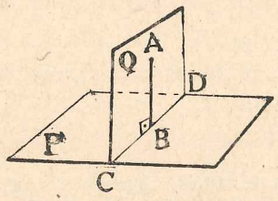
$$(Q) \perp (P) \qquad \text{olur.}$$

Önemli not: Bu teorem tatbikatta çok kullanılır. İki düzlemin dikliğini göstermek gerektiği zaman, bunlardan birinin içinde diğerine dik olan bir doğrunun bulunduğunu göstermiye çalışırız.

72. Teorem. — **Birbirine dik olan iki düzlemden birinin içinde arakesite dik olarak çizilen her doğru, diğer düzleme dik olur.**

(Y. g.) $(P) \perp (Q)$ ve $AB \perp CD$ olsun (Şek. 80); (P) düzlemi içinde CD ye BE dikmesini çiziniz. Niçin $\widehat{ABE} = 90°$ dir? Şu halde:

$$AB \perp (P) \qquad \text{olur (No. 47).}$$



Şek. 81

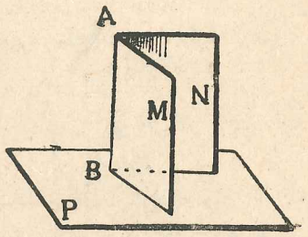
73. Teorem. — **Birbirine dik olan iki düzlemden birinin içindeki bir A noktasından diğer düzleme çizilen dik doğru ilk düzlemin içinde kalır (Şek. 81).**

(Y. g.) A noktasından CD arakesitine çizilen AB dikmesi (P) düzlemine de dik olur (No. 72). A noktasından (P) düzlemine başka dikme çizilebilir mi?

Soru. — **Dik iki düzlemden birinin içindeki bir doğru, diğerinin içindeki bir doğruya ne zaman dik, yahut dik durumlu olabilir?**

74. Teorem. — **Kesişen iki düzlemin her biri bir (P) düzlemine dik olursa, bunların arakesitleri de bu (P) düzlemine dik olur (Şek. 82).**

(Y. g.) Arakesit üzerinde alınan bir A noktasından (P) düzlemine çizilen dikmenin hem (M), hem de (N) düzleminin içinde kalacağını görünüz.

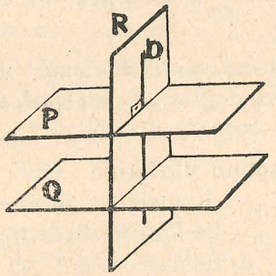


Şek. 82

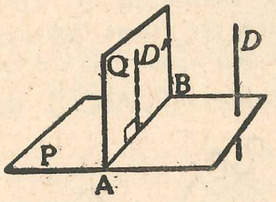
75. Teorem. — **Paralel iki düzlemden birine dik olan düzlem diğerine de diktir.**

Yani, $(P)//(Q)$ ve $(R) \perp (P)$ ise $(R) \perp (Q)$ dür. (Şek. 83).

(Y. g.) (R) düzleminin içinde (P) ye dik olan bir D doğrusunun (Q) ye de dik olacağını görünüz.



Şek 83



Şek. 84

76. Teorem. — **Aynı düzleme dik olan bir doğru ile bir düzlem birbirine paralel olur.**

Yani, $D \perp (P)$ ve $(Q) \perp (P)$ ise $D//(Q)$ dür (Şek. 84).

Gerçekten, (Q) içinde AB arakesitine dik olarak çizilen D' doğrusu (P) ye dik ve dolayısiyle D ye paralel olur. Şu halde

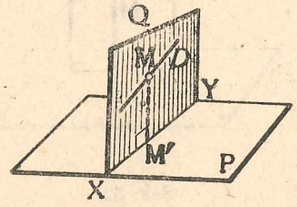
$$D//(Q) \qquad \text{dür.}$$

77. Teorem. — **Bir doğru iki düzlemden birine dik, diğerine paralel olursa bu iki düzlem birbirine dik olur.**

Yani, $D \perp (P)$ ve $D//(Q)$ ise $(Q) \perp (P)$ dir (Şek. 84).

Gerçekten, (Q) düzlemi içinde D ye paralel D' gibi bir doğru vardır ve $D' \perp (P)$ olur. Şu halde $(Q) \perp (P)$ dir.

78. Temel çizim (Teorem). — Bir düzleme dik olmıyan bir doğrudan geçmek ve bu düzleme dik olmak üzere ancak bir düzlem çizilebilir.



Şek. 85

Bir (P) düzlemiyle bu düzleme dik olmıyan bir D doğrusu verilmiş olsun (Şek. 85).

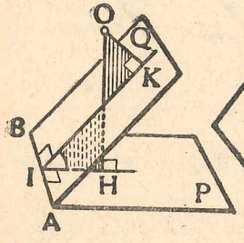
D den geçen ve (P) ye dik olan bir düzlem elde etmek için, D doğrusu üzerindeki her hangi bir M noktasından (P) ye MM′ dikmesini indirelim. D doğrusu ile MM′ nün belirttiği (Q) düzlemi (P) ye dik olur (No. 71).

Bu (Q) düzlemi bir tanedir. Çünkü D doğrusunun diğer bütün noktalarından (P) düzlemine çizilen dik doğruların hepsi bu (Q) düzleminin içinde kalır (No. 73).

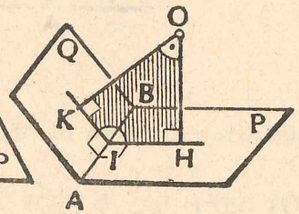
79. ***Problem.*** *— Bir* O *noktasından ikidüzlemli bir açının yüzlerine iki dikme indiriliyor. Bu iki doğrunun arasındaki açı ile ikidüzlemli açının ölçek açısı eşit veya bütünlerdir. Niçin?*

Çözüm: (P, AB, Q) ikidüzlemli açının yüzlerine OH ve OK dikmelerini indirelim. OH ile OK nin belirttiği (HOK) düzlemi AB yi I da kessin. Bu düzlem (P) ve (Q) yüzlerine dik olduğundan bunların AB ayrıtına da dik olur. Şu halde

IH ⊥ AB ve IK ⊥ AB



Şek. 86



Şek. 87

dir: Buna göre HIK açısı, verilen ikidüzlemli açının ölçek açısı olur.

(HOK) düzleminin içinde bulunan HOK ve HIK açıları, kenarları dik açılar olduğu için eşit veya bütünler olurlar (Şek. 86 veya 87).

IV. BÖLÜM ÜZERİNE:

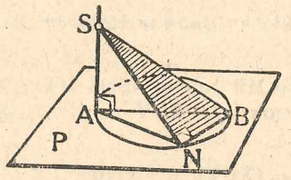
A) PROBLEMLER

1. *Çapı* AB *olan bir çemberin düzlemine* A *noktasından çıkılan dikme üzerinde alınan bir nokta* S *ve çemberin her hangi bir noktası da* N *olsun;* S, A, B, N *noktaları ikişer ikişer birleştiriliyor* (Şek. 88).

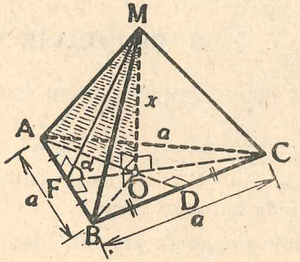
a) Elde edilen SABN *cisminde bütün yüzler birer dik üçgen olur;*

b) (SAN), (SBN) *düzlemleri birbirine dik olur. Niçin?*

(Y. g) NB ⊥ (SAN) olacağını görünüz.



Şek. 88



Şek. 89

2. *Kenarı a olan* ABC *eşkenar üçgeninin* O *merkezinden üçgen düzlemine çıkılan dikme üzerinde* OM = x *olmak üzere bir* M *noktası alınıyor* (Şek. 89).

a) MA ⊥ BC *olduğunu gösteriniz.*

b) OM = x *ne olmalıdır ki* (M, AB, C) *ikidüzlemli açısı 60° olsun.*

c) OM = x *ne olmalıdıdır ki* MA, MB, MC *doğruları ikişer ikişer birbirine dik olsun.*

3. *Merkezi* O *olan bir yarım çemberin düzlemine* O *noktasından çizilen dikme üzerinde alınan bir nokta* S *ve çemberin her hangi bir* M *noktasındaki teğeti* MT *olduğuna göre* (SOM), (SMT) *düzlemleri birbirine dik olur. Niçin?*

4 *Bir* ABCD *dik dörtgeninin düzlemine* A *köşesinden çıkılan dikme üzerinde alınan bir* M *noktası* B, C, D *köşeleri ile birleştiriliyor. Elde edilen cismin bütün yan yüzleri birer dik üçgen olur. Niçin?*

5. *Kenarı a olan* ABCD *karesinin düzlemine* O *merkezinden çizilen dikme üzerinde* OM = x *alınıyor.*

a) x *ne olmalı ki* M *nin köşelere olan uzaklıkları a kadar olsun.*

b) *Bu durumda* (MAB) *düzlemiyle kare düzlemi arasındaki açıyı bulunuz.*

6 *Hipotenüsü a olan* ABC *ikizkenar dik üçgeninin düzlemine* AA′ = x *dikmesi çiziliyor.*

a) x *ne olmalı ki* A′BC *üçgeni eşkenar olsun?*

b) *Bu durumda* (A′, BC, A) *ikidüzlemli açısını hesaplayınız.*

7. (P, Q) *ikiyüzlü açısının* (R) *açıortay düzlemine dik olan bir doğru,* (R) *yi* O *da,* (P) *ve* (Q) *yü de* A *ve* B *de kesiyor.*

OA = OB

olduğunu gösteriniz

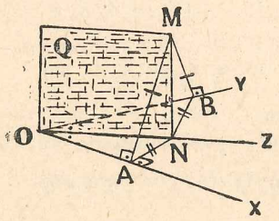
8. *A ve B ucları, ikidüzlemli bir açının (P), (Q) yüzleri üzerinde bulunan AB doğru parçası veriliyor. A nın (Q) düzlemine olan AA′ uzaklığı, B nin (P) düzlemine olan BB′ uzaklığına eşit ise, AB üzerindeki her hangi bir M noktasının (P) ve (Q) düzlemlerine olan uzaklıklarının toplamı sabit olur. Niçin?*

B) GEOMETRİK YER PROBLEMLERİ

9. *Bir açının kenarlarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nedir?*

(Y. g.) MA ⊥ OX , MB ⊥ OY ve MA = MB olsun (Şek. 90); M den (XOY) düzlemine MN dikmesi çizilirse, N noktası, XOY açısının OZ açıortayı üzerinde bulunur. Niçin?

Şu halde geometrik yer, OZ den geçen ve (XOY) düzlemine dik olan bir düzlemdir.



Şek. 90

10. *Bir O noktasında kesişen ve aynı düzlem içinde olmıyan üç doğrudan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nedir?*

11. *Paralel iki doğrudan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nedir?*

12. *Paralel üç doğrudan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri nedir?*

13. *D ve L gibi sabit iki doğru ile D ye dik sabit bir (R) düzlemi veriliyor. D den geçen her hangi bir (P) düzlemiyle, L den geçen ve (P) ye dik olan (Q) düzlemi çiziliyor. (P), (Q) ve (R) düzlemlerinin ortak noktası M olsun; (P) düzlemi D doğrusu etrafında döndüğü vakit bu M noktasının geometrik yeri ne olur?*

C) ÇİZİM PEOBLEMLERİ

14. *Bir doğru, ikidüzlemli bir açının yüzlerini A, B noktalarında kesiyor. Bu ikidüzlemli açının ayrıtı üzerinde öyle bir M noktası bulunuz ki AMB açısı bir dik açı olsun.*

(Y. g.) AB nin ortası O olsun; $OM = \frac{AB}{2}$ olacağını görünüz.

15. *Bir (P) düzlemi ile bunun dışında bir D doğrusu ve bir de A noktası veriliyor. A dan geçmek, D ye paralel ve (P) ye dik olmak üzere bir düzlem çiziniz.*

16. *Bir O noktasından geçen ve (P), (Q) düzlemlerine dik olan bir düzlem çiziniz.*

17. *Dik durumlu olan D, L doğruları veriliyor. D den geçen ve L ye dik olan düzlemi çiziniz.*

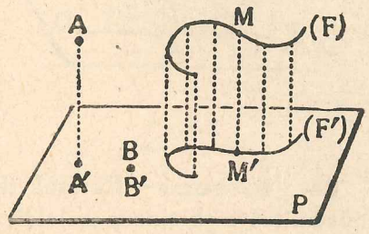
(Y. g.) L den geçen ve D ye paralel olan düzlemi çizerek düşününüz.

BÖLÜM V

DİK İZDÜŞÜM

80. Bir noktanın izdüşümü. — Bir noktadan bir düzleme indirilen dikmenin ayağına, bu noktanın bu düzlem üzerindeki *dik izdüşümü* denir [*].

«Şek. 91» de A noktasının dik izdüşümü A′ noktasıdır. (P) düzlemine *izdüşüm düzlemi* denir. AA′ doğrusuna *izdüşüren doğru* adı verilir.

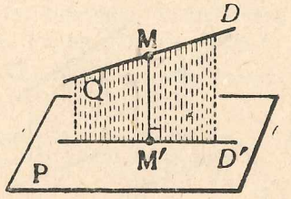


Şek. 91

Not: İzdüşüm düzlemi üzerindeki bir noktanın izdüşümü kendisidir.

81. Bir şeklin izdüşümü. — Bir (F) şeklinin bir (P) düzlemi üzerindeki izdüşümü diye, bu şeklin bütün noktalarının izdüşümlerini birleştirmekle elde edilen (F′) şekline denir.

82. Teorem. — Bir düzleme dik olmıyan bir doğrunun bu düzlem üzerindeki izdüşümü yine bir doğrudur.



Şek. 92

İspatı: *D* doğrusu üzerindeki bir M noktasından (P) düzlemine MM′ dikmesini indirelim. *D* ile MM′ nün belirtiği (Q) düzlemi (P) ye dik olur. (Şek. 92). *D* nin diğer bütün noktalarından (P) düzlemine indirilen dikmeler bu (Q) düzleminin içinde kalırlar. Bu dikmelerin ayakları, (Q) ile (P) nin arakesidi olan *D′* doğrusunu meydana getirirler. Şu halde *D* nin izdüşümü *D′* doğrusudur.

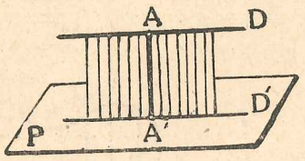
D doğrusu, (P) düzlemini bir noktada keserse, izdüşümü de aynı noktadan geçer.

Burada (Q) düzlemine *izdüşüm düzlem* adı verilir.

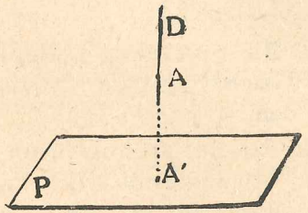
[*] Bu kitapta başka türlü izdüşümleri görmiyeceğimiz için, «*dik izdüşüm*» sözü yerine sadece «*izdüşüm*» sözünü kullanacağız.

83. Özel haller. 1°. D doğrusu (P) düzlemine paralel olursa izdüşümü kendisine paralel olur (No. 23) (Şek. 93).

2°. D doğrusu (P) düzlemine dik olursa, izdüşümü bir nokta olur (Şek. 94).



Şek. 93



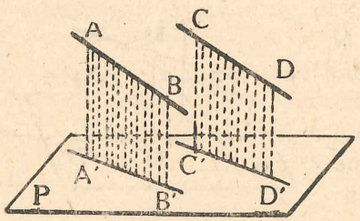
Şek 94

84. Teorem. — Paralel iki doğrunun bir düzlem üzerindeki izdüşümleri birbirine pareleldir.

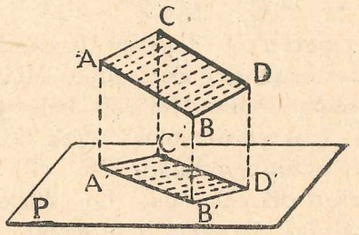
İspatı: AB // CD olsun (Şek. 95); bu iki doğruyu izdüşüren (ABB'A'), (CDD'C') düzlemleri birbirine paralel olur. Şu halde

$$A'B' // C'D'$$

dür (No. 35).



Şek. 95



Şek. 96

85. Netice. — Birbirine paralel ve eşit olan iki doğru parçasının izdüşümleri de birbirine paralel ve eşit olur.

Yani $AB // = CD$ ise $A'B' // = C'D'$ dür (Şek. 96).

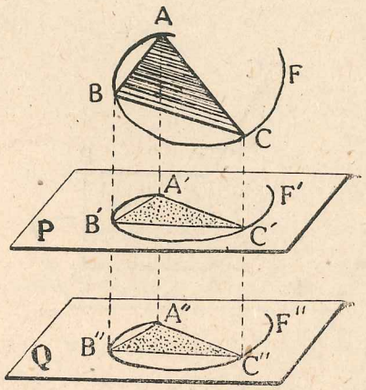
86. Teorem. — Bir şeklin paralel iki düzlem üzerindeki izdüşümleri birbirine eşittir.

İspatı: Bir **F** şeklinin üç noktası A, B, C ve bu noktaların (P), (Q) gibi paralel iki düzlem üzerindeki izdüşümleri A', B', C' ve A'', B'', C'' olsun (Şek. 97). A'B'B''A'' bir dik dörtgen olduğundan

$$A'B' // = A''B''$$

olur. Aynı şekilde

$B'C' // = B''C''$ ve $A'C' // = A''C''$ olduğundan A'B'C', A''B''C'' üçgenleri eşit olur (*K.K.K.*). Şu halde bu iki üçgen birbiriyle çakıştırılabilir. Bundan anlaşılır ki C noktası **F** şeklini çizerse, C' ve C'' noktaları da birbirine eşit olan **F'** ve **F''** şekillerini çizerler.



Şek. 97

Not. — Bu teoremden anlaşılır ki:

Bir şeklin izdüşümünü incelemek için, izdüşüm düzlemi yerine bu düzleme paralel bir düzlem alınabilir.

Sorular:

1. Bir doğru parçasının orta noktasının bir düzlem üzerineki izdüşümü, bu doğru parçasının izdüşümünün orta noktası olur. Niçin?

2. Bir AB doğru parçasını verilen bir orana göre içten ve dıştan bölen M, N noktalarının AB ye dik olmıyan bir düzlem üzerindeki izdüşümleri, bu doğru parçasının izdüşümünü aynı oranda içten ve dıştan bölerler. Niçin?

3 Bir üçgenin ağırlık merkezinin bir düzlem üzerindeki izdüşümü, bu üçgenin izdüşümünün ağırlık merkezi olur. Niçin?

4 Bir doğru kesişen ile düzlemin birine dikse, bu doğrunun diğer düzlem üzerindeki izdüşümü, bu iki düzlemin arakesitine dik olur. Niçin?

BİR DİK AÇININ İZDÜŞÜMÜ

87. Teorem. — Bir kenarı izdüşüm düzlemine paralel olan bir dik açının izdüşümü yine bir dik açıdır.

İspatı: $AB // (P)$, $AB \perp AC$ (hipotez)

$AA' \perp (P)$ (çizimden)

olduğundan:

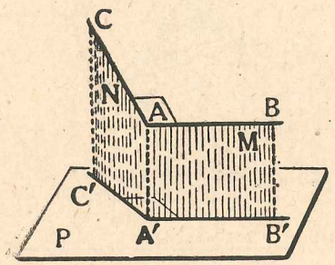
$AB // A'B'$, $A'B' \perp AC$ $A'B' \perp AA'$

ve nihayet $A'B' \perp (N)$ olur. Şu halde

$A'B' \perp A'C'$

dür. (Şek. 98).

88. Teorem. — **Bir kenarı izdüşüm düzlemine paralel olan bir açının izdüşümü dik açı ise, bu açı da bir dik açıdır.**



Şek. 98

(Y. g.) Yukardaki gibi hareket ederek:

$AB // A'B'$, $A'B' \perp (N)$, $A'B' \perp AC$

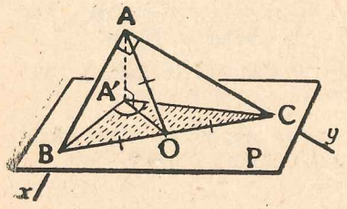
ve nihayet $AB \perp AC$

olduğunu bulunuz (Şek. 98).

89. Teorem. — **Bir dik açının bir düzlem üzerindeki izdüşümü yine bir dik açı olursa, bu açının hiç olmazsa bir kenarı izdüşüm düzlemine paralel olur.**

(Y. g) AC, (P) düzlemine paralel olmasın (Şek. 98); bu takdirde AB nin (P) düzlemine paralel olacağını göstermelidir.

$AA' \perp (P)$, $A'C' \perp (M)$, $A'C' \perp AB$, $AB \perp (N)$, $A'B' \perp (N)$ olacağına dikkat ederek $AB // A'B'$ olduğunu bulunuz.



Şek. 99

90. ***Problem.*** — *Kenarları izdüşüm düzlemini kesen bir dik açının izdüşümü bir geniş açı olur. Niçin?*

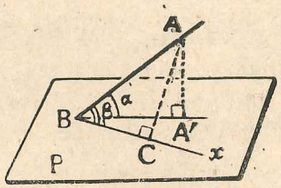
(Y. g) $2\,A'O < BC$ olacağını görünüz (Şek. 99). Bu takdirde niçin $\widehat{BA'C} > 90°$ olur.

BİR DOĞRUNUN BİR DÜZLEMLE YAPTIĞI AÇI [*]

91. Tanım. — Bir doğrunun bir düzlem üzerindeki izdüşümü ile yaptığı dar açıya *bu doğru ile düzlemin arasındaki açı* veya doğrunun bu düzleme göre olan *eğim açısı* denir.

[*] Bu konular işlenmeden önce, öğrencilere «bir açının trigonometrik fonksiyonlarını» tanıtmak uygun olur.

AB nin (P) düzlemi üzerindeki izdüşümü BA' olsun (Şek. 100); $\widehat{ABA'} = \alpha$ açısı, AB nin (P) düzlemiyle yaptığı açıdır.



Şek. 100

Bu α açısının tangentine, AB nin (P) düzlemine göre olan *eğimi* denir.

92. Teorem. — **Bir doğrunun bir düzlem üzerindeki izdüşümü ile yaptığı açı, doğrunun izinden geçen ve düzlem üzerinde bulunan diğer bütün doğrularla yaptığı açılardan daha küçüktür.**

İspatı: AB nin (P) düzlemi üzerindeki izdüşümü BA' olsun; (P) düzlemi içinde B den geçen her hangi bir Bx doğrusuna AC dikmesini çizelim;

$$\sin\alpha = \frac{AA'}{AB} \quad , \quad \sin\beta = \frac{AC}{AB}$$

dir. AA' düzleme dik, AC ise eğik olduğundan $AA' < AC$ olur.

Şu halde:

$$\sin\alpha < \sin\beta$$

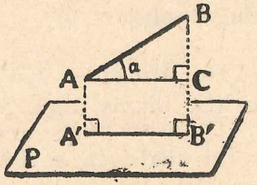
ve dolayısiyle $\alpha < \beta$ bulunur.

93. Sorular:

1. Bir AB doğru parçasının bir (P) düzlemi üzerindeki izdüşümünün uzunluğu, AB doğrusunun (P) düzlemiyle yaptığı açının kosinüsü ile AB doğru parçasının çarpımına eşittir. Yani?

$$A'B' = AB \cdot \cos\alpha$$

dır (Şek 101). Niçin?



Şek. 101

2. Paralel iki doğru parçasının bir düzlem üzerindeki izdüşümleri, kendileri ile orantılıdır. Niçin?

3. Bir noktadan bir düzleme çizilen eşit uzunluktaki eğikler, bu düzlemle eşit açılar yaparlar. Niçin?

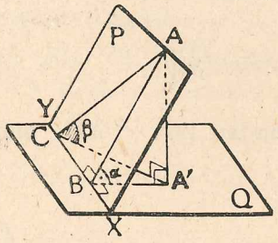
4 Bir noktadan bir düzleme çizilen iki eğikten hangisi bu düzlemle daha büyük açı yaparsa, o eğiğin ayağı, dikme ayağına daha yakın bulunur. Niçin?

BİR DÜZLEMİN DİĞER BİR DÜZLEME GÖRE EN BÜYÜK EĞİM DOĞRUSU

94. Tanım. — Kesişen iki düzlemden birinin içinde arakesite dik olarak çizilen her hangi bir doğruya, bu düzlemin diğer düzleme göre *en büyük eğim doğrusu*, bu doğrunun düzlemle yaptığı açıya da *en büyük eğim açısı* denir.

Soru. — Kesişen iki düzlemden birinin içinde arakesite dik olarak çizilen bütün doğruların diğer düzlemle yapmış oldukları açılar birbirine eşit olur. Niçin?

95. Teorem. — **(P) ve (Q) gibi kesişen iki düzlemden (P) içinde arakesite dik olarak çizilen her hangi bir doğrunun (Q) düzlemiyle yaptığı açı, (P) içindeki diğer bütün doğruların (Q) düzlemiyle yaptığı açıların hepsinden büyüktür.**



Şek. 102

İspatı: (P) düzleminin bir A noktasından arakesite AB dikmesi ile bir AC eğiği çizelim. A noktasının (Q) düzlemi üzerindeki izdüşümü A′ olsun (Şek. 102); AB ve AC nin (Q) düzlemiye yaptığı açıları α ve β ile gösterirsek:

$$\sin\alpha = \frac{AA'}{AB} \quad \text{ve} \quad \sin\beta = \frac{AA'}{AC}$$

yazılır. $AB < AC$ olduğundan

$$\sin\alpha > \sin\beta \quad \text{yahut}$$

$$\widehat{\alpha} > \widehat{\beta}$$

olduğu anlaşılır.

96. İhtar. — $AB \perp XY$, $AA' \perp (Q)$ olduğundan $A'B \perp XY$ olur (Üç dikme teo.). Şu halde:

İki düzlemin en büyük eğim açısı, bu iki düzlem arasındaki açının ölçek açısından ibarettir.

Ödev. — 30° lik ikidüzlemli bir açının yüzlerinden biri üzerinde ayrıtla 45° lik açı yapan 2 cm uzunluğundaki bir doğru parçasının, diğer yüz üzerindeki izdüşümünü hesaplayınız.

BİR DÜZLEM ŞEKLİN BİR DÜZLEM ÜZERİNDEKİ İZDÜŞÜMÜNÜN ALANI

97. Teorem. — **Bir düzlem şeklin bir düzlem üzerindeki izdüşümünün alanı, şeklin alanı ile şekil düzleminin izdüşüm düzlemiyle yaptığı açının kosinüsü çarpımına eşittir.**

İspatı:

A. — **Verilen düzlem şekil bir üçgen olduğuna göre:**

1. hal: ABC *üçgeninin* BC *kenarı izdüşüm düzlemine paraleldir.* — Bu takdirde BC den geçen ve izdüşüm düzlemine paralel olan (P) düzlemi üzerindeki izdüşümü incelemek yeter (No. 86).

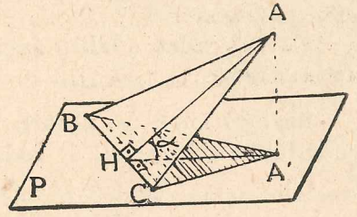
$AH \perp BC$, $AA' \perp (P)$

çizelim (Şek. 103);

$A'H \perp BC$ olur (Üç dikme teo.)

ABC, A′B′C′ üçgenlerinin alanları:

$$S = \frac{BC \cdot AH}{2}, \quad S' = \frac{BC \cdot A'H}{2}$$



Şek. 103

dir. AHA′ dik üçgeninde

$$A'H = AH \cdot \cos\alpha$$

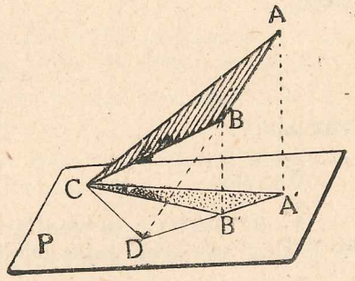
dır. Bunu, S' nün eşidinde yerine koyarak:

$$\boxed{S' = S \cdot \cos\alpha}$$

bulunur.

2. hal: ABC *üçgeni her hangi durumdadır.* — Bu takdirde C köşesinden geçen ve izdüşüm düzlemine paralel olan (P) düzlemi üzerindeki izdüşümü incelemek yeter.

AB, (P) düzlemi D de kessin (Şek. 104);



Şek. 104

$$A'CD \text{ alanı} = ACD \text{ alanı} \times \cos\alpha$$

$$B'CD \text{ alanı} = BCD \text{ alanı} = \cos\alpha$$

dır. Taraf tarafa çıkararak:

A'CD alanı — B'CD alanı = (ACD alanı — BCD alanı). cos α

veya

$$S' = S \cdot \cos \alpha$$

bulunur.

B. — Verilen düzlem şekil bir çokgen olduğuna göre:

Bu çokgen birtakım üçgenlere ayrılır ve bu üçgenlerin alanları toplamının çokgenin alanını vereceği düşünülürse:

$$S' = S \cdot \cos \alpha$$

bulunur.

C. — Verilen düzlem şekil her hangi bir eğri ile çevrilmiş olduğuna göre:

Bu eğri içine n kenarlı bir çokgen çizilir. Bu çokgenin alanı T ve izdüşümünün alanı T' olduğuna göre n ne olursa olsun

$$T' = T \cdot \cos \alpha$$

dır. n sayısı sınırsız surette arttırılırsa çokgenin çevresi eğrinin çevresi ile çakışır. Şu halde:

$$\lim T' = \lim T \cdot \cos \alpha$$

yahut

$$S' = S \cdot \cos \alpha$$

yazılabilir.

Ödevler:

1. Bir kenarı 2 cm olan birr eşkenar üçgenin düzlemiyle 60° lik açı yapan bir düzlem üzerindeki izdüşümünün alanını bulunuz.

2. Bir kenarı a olan bir karenin düzlemiyle 45° lik açı yapan bir düzlem üzerindeki izdüşümünün alanı $8\sqrt{2}$ cm olduğuna göre a yı bulunuz.

3. Yarıçapı 10 cm olan bir dairenin düzlemiyle 30° lik açı yapan bir düzlem üzerindeki izdüşümünün alanını bulunuz. (Dairenin, düzlemine peralel olmıyan bir düzlem üzerindeki izdüşümüne *elips* adı verilir.)

V. BÖLÜM ÜZERİNE:

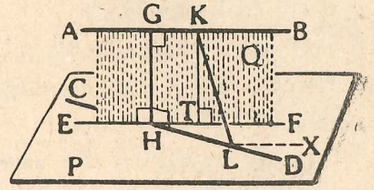
A) PROBLEMLER

1. *Aykırı iki doğru verildiğine göre:*

1°. *Bu iki doğruya, ancak, bir ortak dikme çizilebilir* [*];

2°. *Bu ortak dikme, iki doğru arasındaki doğru parçalarının en küçüğüdür. Niçin?*

Çözümü: 1°. İki aykırı doğru AB, CD olsun (Şek. 105); CD den geçen ve AB ye paralel olan (P) düzlemini çizerek, AB nin bu düzlem üzerindeki EF izdüşümünü alalım. EF doğrusu, CD yi bir H noktasında keser. Bu noktadan AB ye HG dikmesini çizelim; EF // AB olduğundan HG $\perp$ EF olur. Buna göre HG doğrusu (P) düzlemine dik olur (No 72). Şu halde HG, CD doğrusuna da diktir.



Şek. 105

AB, CD doğrularının ortak dikmesi olan bu HG doğru parçası bir tanedir. Çünkü bu doğruların KL gibi ikinci bir ortak dikmesi olsa,

KL $\perp$ EF ve KL $\perp$ (P)

olur. Bu takdirde KL nin (Q) düzleminin içinde bulunması gerektir (No. 73). Bu mümkün olmadığından KL ortak dikme değildir.

2°. (Şek. 105) de:

$$HG = TH\ ,\quad TK < KL$$

olduğundan $HG < KL$ olduğu anlaşılır.

Demek ki ortak dikme, AB ile CD arasındaki diğer doğru parçalarından kısadır.

2. *İki aykırı doğrunun arasındaki bütün doğru parçalarının orta noktaları, ortak dikmenin orta dikme düzlemi üzerinde bulunurlar. Niçin?*

3. *Aykırı iki doğrunun ortak dikmesine paralel olan her düzlem üzerindeki izdüşümleri birbirine paralel olur. Niçin?*

4. *Verilen bir uzay dörtgenin hangi düzlem üzerindeki izdüşümü bir paralelkenar olur?* (3 üncü problemden faydalanınız.)

5. *Bir* ABC (AB = AC) *ikizkenar üçgeninin:*

a) BC *tabanından;* **b)** AO *yüksekliğinden geçen her hangi bir düzlem üzerindeki izdüşümü de bir ikizkenar üçgen olur. Niçin?*

(Y. g) Yeni üçgende tabana ait yükseklik ile kenarortayın aynı olacağını görünüz.

---

[*] Uçları iki aykırı doğru üzerinde bulunan ve bunların her birine dik olan doğru parçasına, bu doğruların *ortak dikmesi* denir. Bu ortak dikmeye *iki doğru arasındaki uzaklık* adı verilir.

6. *Bir açının açıortayına paralel olan bir düzlem üzerindeki izdüşümünün açıortayı, kendi açıortayının izdüşümünden ibarettir. Niçin?*

(Y. g.) Yukardaki problemden faydalanınız.

7. *Aralarında 45° lik bir açı bulunan* (P), (Q) *düzlemleri veriliyor;* (P) *düzlemi içindeki bir eşkenar dörtgenin* (Q) *düzlemi üzerindeki izdüşümü bir kare olduğuna göre:*

a) *Bu karenin bir köşegeni, eşkenar dörtgenin bir köşegenine paraleldir;*

b) *Eşkenar dörtgenin diğer köşegeni, iki düzlemin arakesitine diktir. Niçin?*

c) *Karenin kenarın a olduğuna göre, eşkenar dörtgenin kenarını ve köşegenlerini kesaplayınız.*

(Y. g.) (a) için «No. 89» u, (b) için «No. 23» ü göz önüne alınız.

8 *Bir kenarı izdüşüm düzlemine paralel olan bir dar açının izdüşümü, kendisinden küçüktür. Niçin?*

(Y. g) Bu dar açı x ve izdüşümü x' olsun; $\operatorname{tg} x' < \operatorname{tg} x$ olacağını görünüz.

9 *Bir kenarı izdüşüm düzlemine paralel olan bir geniş açının izdüşümü, kendisinden büyüktür. Niçin?* (Bu açıların bütünlerini düşününüz)

10 *Ölçek açısı* α *olan ikidüzlemli bir* (P, AB, Q) *açısının* AB *ayrıtına, bu ayrıtın üzerindeki bir* O *noktasından,* (P) *yüzü içinde* Ox *dikmesi ile* (Q) *yüzü içinde bir* Oy *eğiği çiziliyor;*

a) *Eğer* α *açısı dar açı ise* $\widehat{xOy} > \alpha$;

b) *Eğer* α *açısı dik açı ise* $\widehat{xOy} = \alpha$;

c) *Eğer* α *açısı geniş açı ise* $\widehat{xOy} < \alpha$;

olur. Niçin?

(Y. g) a) Ox in (Q) düzlemi ile yaptığı açının α olacağını görerek «No. 92» yi göz önüne alınız

c) xOy, α açılarının bütünlerini düşününüz.

11 *Bir* AB *doğru parçasının her hangi bir* D *doğrusu üzerindeki izdüşümünün uzunluğu,* AB, D *doğrularının arasındaki açının kosinüsü ile* AB *doğru parçasının çarpımına eşittir. Niçin?*

(Y. g) D den geçen ve AB ye paralel olan (P) düzlemini çiziniz. Sonra AB nin bu düzlem üzerindeki izdüşümünü alarak düşününüz.

12 *Bir* D *doğrusu ikidüzlemli bir açının açıortay düzlemi içinde bulunur veya ona paralel olursa, bu doğru, ikidüzlemli açının yüzleri ile eşit açılar yapar. Niçin?*

13 *İkidüzlemli bir açının açıortay düzlemine dik olan bir doğru, bu açının yüzleriyle eşit açılar yapar Niçin?*

14 *İkiyüzlü bir açının ölçek açısı* α, *bir yüz içinde ayrıtla* β *açısı yapan bir doğrunun diğer yüzle yaptığı açı* θ *olduğuna göre*

$$\sin\theta = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

olduğunu gösteriniz.

15 *Karşılıklı kenarları eşit olan bir uzay dörtgende köşegenlerin orta noktalarını birleştiren doğru parçası, bu köşegenlerin ortak dikmesidir. Niçin?*

16. *Kenarları a kadar olan* ABC *eşkenar üçgeni veriliyor. Bu üçgenin düzlemine üçgenin her köşesinden dikmeler çiziliyor ve bu dikmeler üzerinde aynı tarafa doğru*

$$AA' = a\ ,\ BB' = 2a\ ,\ CC' = x$$

uzunlukları alınıyor.

a) *x ne olmalı ki* A'B'C' *üçgeni dik üçgen olsun?*

b) *Bu durumda* (ABC) *ve* (A'B'C') *düzlemleri arasıdaki açının kosinüsünü hesaplayınız.*

17. *Kenarları a kadar olan* ABC *eşkenar üçgeninin düzlemine* B *ve* C *köşelerinden çizilen dikmeler üzerinde aynı tarafa doğru*

$$BM = x \quad ve \quad CN = 2x$$

uzunlukları alınıyor.

a) *Daima* MN *nin sabit bir* S *noktasından geçtiğini ve* SA *nın* AN *ve* AC *ye dik olduğunu gösteriniz.*

b) *x ne olmalı ki* AMN *üçgeni* M *de dik olsun? Bu durumda* (AMN) *düzlemiyle* (ABC) *düzlemi arasındaki açının kosinüsünü hesaplayınız.*

18. *Bir* (P) *düzlemi ile buna dik bir* D *doğrusu ve her hangi bir* A *noktası veriliyor* A *dan geçen hareketli bir* L *doğrusu ile* D *nin ortak dikmesi* MN *olduğuna göre,* M *nin* (P) *düzlemi üzerindeki izdüşümünün geometrik yeri nedir?*

B) ÇİZİM PROBLEMLERİ

19. *Bir* (P) *düzlemiyle 45° lik açı yapan ve düzlemi* O *noktasında kesen* OA *doğrusu veriliyor. Düzlem içinde öyle bir* OX *yarım doğrusu çiziniz ki* XOA *açısı 60 derece olsun.*

(Y. g) AA' $\perp$ (P) ve AB $\perp$ OX çizilirse B noktası bulunabilir.

20. *Bir* ABC *üçgeni veriliyor.* BC *den geçen öyle bir düzlem belirtiniz ki* BAC *açısının bu düzlem üzerindeki izdüşümü dik açı olsun.*

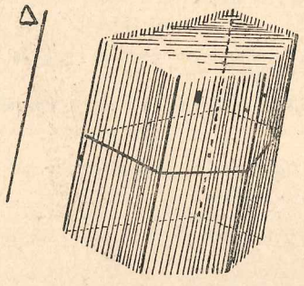
21. *Bir* (P) *düzlemiyle 30° lik açı yapan bir doğrudan geçen ve bu düzlemle 45° lik açı yapan düzlemi belirtiniz.*

22. (P) *ve* (Q) *gibi kesişen iki düzlem veriliyor.* (Q) *düzlemi içinde verilen bir* A *noktasından geçmek ve* (P) *düzlemiyle 60° lik açı yapmak üzere bir doğru çiziniz.*

BÖLÜM VI

PRİZMALAR

98. Prizmatik yüzey. — Bir düzlem çokgeni ile bunun düzlemine paralel olmıyan bir Δ doğrusu verildiğinde, bu Δ doğrusuna paralel olan ve çokgenin kenarlarına dayanarak hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye *prizmatik yüzey* denir (Şek. 106).



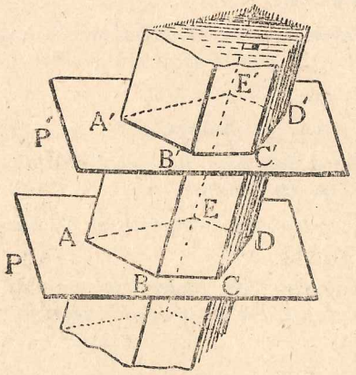
Şek. 106

Çokgene bu prizmatik yüzeyin *doğrultmanı;* çokgenin köşelerinden Δ ya çizilen paralel doğrulara da *yanal ayrıtlar* denir.

Birbirinin ardından gelen iki yanal ayrıt arasındaki düzlem şeridine *yanal yüz* adı verilir. Şu halde çokgen kaç kenarlı ise prizmatik yüzeyin o kadar yanal yüzü vardır.

Bir prizmatik yüzeyin bir düzlemle kesilmesinden elde edilen çokgene *düzlem kesit* veya sadece *kesit* denir. Eğer kesit düzlemi yanal ayrıta dik olursa, elde edilen kesite *dik kesit* adı verilir.

99. Teorem. — Bir prizmatik yüzeyin paralel iki düzlemle kesilmesinden elde edilen iki çokgen birbirine eşittir.



Şek. 107

Hipotez: (P) // (P') ise (Şek. 107).

Hüküm : ABCDE = A'B'C'D'E' dür.

İspat : «No. 32» gereğince:

AB // A'B', BC // B'C', CD // C'D',... olur. Şu halde:

$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCD} = \widehat{B'C'D'}$,... dır (No. 42). Diğer taraftan ABB'A', BCC'B', CDD'C', ... dörtgenleri birer paralelkenar olduğundan:

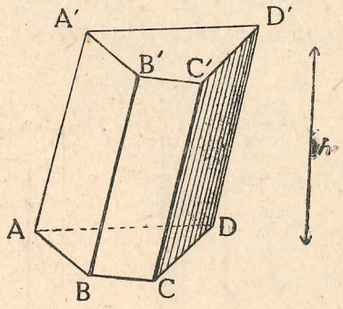
AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D',...

olur. Öyleyse:

Kenarları ve açıları karşılıklı olarak ikişer ikişer eşit olduğundan bu iki çokgen birbirine eşittir.

100. Netice. — Bir prizmatik yüzeyin dik kesitleri birbirine eşittir.

101. Prizma. — Bir prizmatik yüzey ile bunun yanal ayrıtlarını kesen paralel iki düzlem tarafından sınırlanan cisme *prizma* denir (Şek. 108).



Şek. 108

Birbirine eşit olan kesit çokgenlere prizmanın *tabanları* ABCD ye *alt taban*, A'B'C'D' ye *üst taban* denir.

AA', BB', CC', DD' ye prizmanın *yanal ayrıtları*; AB, BC, ..., A'B', B'C',... ye *taban ayrıtları;* ABB'A', BCC'B',... ye prizmanın *yanal yüzleri*; bu yüzlerin alanları toplamına *yanal alan;* tabanların alanları ile yanal alanın toplamına *bütün alan* denir.

Bir prizmada aynı yüz içinde bulunmıyan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına, bu prizmanın *köşegeni* denir.

Prizmanın iki tabanı arasındaki uzaklığa *yükseklik* denir.

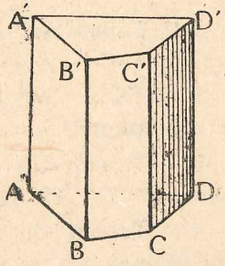
Not: Bir prizmada yüksekliği h, yanal alanı Y, taban alanını G, bütün alanı S ile ve hacmı V ile göstereceğiz.

102. Prizmanın özellikleri:

1°. Bir prizmanın yanal yüzleri birer paralelkenardır.

2°. Bir prizmanın yanal ayrıtları birbirinine paralel ve eşittir.

103. Dik prizma. — Yanal ayrıtları tabanlara dik olan prizmaya *dik prizma* denir (Şek. 109).



Şek. 109

Dik olmıyan bir prizmaya *eğik prizma* veya sadece *prizma* denir.

104. Dik prizmanın özellikleri:

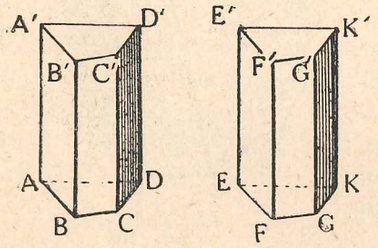
1°. Bir dik prizmanın yanal yüzleri dik dörtgendir.

2°. Bir dik prizmanın yan ayrıtları yüksekliğe eşittir.

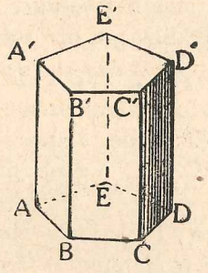
105. Teorem. — Tabanları ve yükseklikleri eşit olan iki dik prizma birbirine eşittir.

İspatı: ABCD, EFGK tabanları çakışmak üzere bu prizmalardan biri diğerinin üzerine götürüldüğünde:

AA′ ile EE′, BB′ ile FF′, CC′ ile GG′, DD′ ile KK′ üst üste gelir (No. 52). Şu halde bu iki prizma eşittir (Şek. 110).



Şek. 110



Şek. 111

106. Düzgün prizma. — Tabanları düzgün çokgen olan dik prizmalara *düzgün prizma* denir. (Şek. 111).

Düzgün prizmanın yanal yüzleri, birbirine eşit dik dörtgenlerdir.

107. Prizmaların adlandırılması. — Bir prizma adlandırılırken, önce tabanın adı, sonra prizmanın dik veya düzgün olup olmadığı ve sonunda da prizma kelimesi söylenir:

1°. Tabanı her hangi bir üçgen olan eğik prizma, *üçgen prizma* diye okunur.

2°. Tabanı her hangi bir üçgen olan dik prizma, *üçgen dik prizma* diye okunur.

3°. Tabanı dik üçgen olan eğik prizma, *dik üçgen prizma* diye okunur.

4°. Tabanı dik üçgen olan dik prizma, *dik üçgen dik prizma* diye okunur.

Bu örnekleri istediğimiz kadar çoğaltabiliriz.

Sorular:

1. Bir kare prizmanın dik kesiti kare midir?

2. Komşu iki yanal yüzü dik dörtgen olan bir prizma dik prizmadır. Niçin?

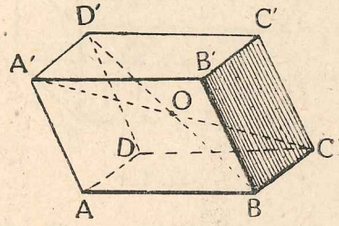
3. Bir prizmanın yanal ayrıtlarından birine paralel olan kesiti, bir paralelkenar olur. Niçin?

ÖZEL PRİZMALAR

108. Paralelyüz. — Tabanları paralelkenar olan prizmaya *paralelyüz* denir (Şek. 112).

Bir paralelyüzün altı yüzü de paralelkenardır. Bu yüzlerden her hangi biri taban olarak alınabilir.

Bir paralelyüzde on iki ayrıt, sekiz köşe ve dört köşegen vardır.



Şek. 112

109. Paralelyüzün özellikleri:

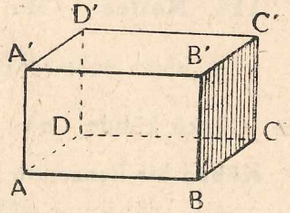
1°. Bir paralelyüzün ayrıtları dörder dörder eşit ve paraleldir.

2°. Bir paralelyüzün karşılıklı yüzleri birbirine eşittir.

3°. Bir paralelyüzün dört köşegeni, birbirlerini orta noktalarında keserler. Niçin? (Meselâ BD′ ve CA′ köşegenleri, birbirini O noktasında ortalarlar; çünkü bunlar, BCD′A′ paralelkenarının köşegenleridir. AC′ ve DB′ köşegenlerinin orta noktasının da bu O noktası olduğu aynı tarzda gösterilir.)

110. Dik paralelyüz. — Tabanları paralelkenar olan dik prizmaya *dik paralelyüz* denir (Şek. 113).

Dik paralelyüzde karşılıklı yanal yüzler birbirine eşit dik dörtgenlerdir.



Şek. 113

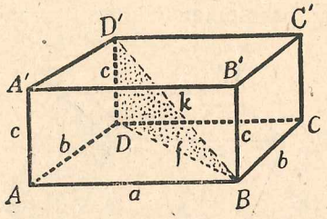
111. Dik dörtgenler prizması. — Tabanları dik dörtgen olan dik prizmaya *dik dörtgenler prizması* denir. Bu prizmanın bütün yüzleri dik dörtgendir.

Dik dörtgenler prizmasında bir köşeden çıkan üç ayrıta, bu dik dörtgenler prizmasının *boyutları* denir.

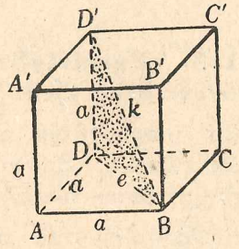
Dik dörtgenler prizması özel bir paralelyüz olduğundan paralelyüzün bütün özelliklerini taşır. Fazla olarak *dik dörtgenler prizmasının köşegenleri birbirine eşittir.*

112. Küb. — Bütün ayrıtları birbirine eşit olan dik dörtgenler prizmasına *küb* denir.

Kübün altı yüzü de kare olup, birbirine eşittir.



Şek. 114



Şek. 115

113. Teorem. — Bir dik dörtgenler prizmasının köşegeninin karesi, bir köşeden geçen üç ayrıtının kareleri toplamına eşittir.

İspatı: BDD′ dik üçgeninde (Şek. 114),

$$k^2 = f^2 + c^2$$

dir. BAD dik üçgeninde $f^2 = a^2 + b^2$ olduğundan:

$$k^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{veya} \quad \boxed{k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

bulunur.

114. Netice. — Bir kenarı a olan bir kübün köşegeni

$$\boxed{k = a\sqrt{3}}$$

dür. Çünkü kübde $a = b = c$ olur (Şek. 115).

Kübün bir kenarının köşegen cinsinden değeri: $a = \dfrac{k\sqrt{3}}{3}$ **olur.**

PRİZMANIN ALANI

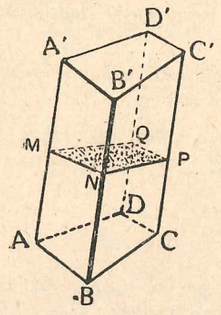
115. Teorem. — Eğik bir prizmanın yanal alanı, dik kesit çevresi ile yanal ayrıtının çarpımına eşittir.

İspatı: ABCDA′B′C′D′ prizmasının dik kesiti MNPQ olsun.

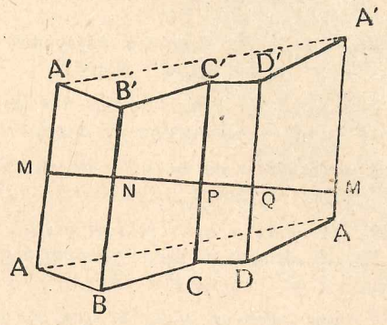
Bu dik kesitin kenarları, prizmanın yanal yüzlerinin yükseklikleri olacağından:

$$Y = (MN + NP + PQ + QM) \cdot a$$

bulunur. Burada a, prizmanın yanal ayrıtıdır (Şek. 116).



Şek. 116



Şek. 117

Not: Verilen prizmanın bir düzlem üzerindeki açılımı yapılırsa yukardaki sonuca derhal varılabilir (Şek. 117).

116. Netice. — Bir dik prizmanın yanal alanı, tabanının çevresi ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

117. Dik dörtgenler prizmasının bütün alanı:

$$\boxed{S = 2\,(ab + bc + ca)}$$

dır. Burada a, b, c bir köşeden çıkan üç ayrıtı göstermektedir.

118. Kübün alanı: $\boxed{S = 6\,a^2}$ **dir.**

Burada a, kübün bir kenarını göstermektedir.

PROBLEMLER

1. *Bir paralelyüzün O merkezinden geçen her doğrunun şekil içinde kalan parçasının ortası O noktasıdır. Niçin?*

2. *Bir dik dörtgenler prizmasında bir köşeden geçen köşegenin bu köşedeki ayrıtlarla teşkil ettiği açılar x, y, z olduğuna göre:*

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$$

olur. Niçin?

(Y. g) Adı geçen köşegenin öteki ucundan geçen yüz köşegenlerini çizerek düşününüz.

3. *Bir kübün bir köşegeninin kenarlarla yaptığı açılar birbirine eşittir. Niçin?*

4. *Bir kübde bir kenarın köşegenlerden biri üzerindeki izdüşümü, bu köşegenin üçte birine eşittir. Niçin?*

5. *Tabanının bir kenarı* 10 cm. *ve yüksekliği* 20 cm *olan eşkenar üçgen dik prizmanın yanal ve bütün alanını hesaplayınız.* ($Y = 600$ cm^2.; $S = 686{,}5$ cm^2.)

6. *Yüksekliği* 10 cm *olan bir üçgen dik prizmanın taban kenarları 3, 4, 5 ile orantılıdır. Bu kenarlar, birbirini takip eden üç çift sayı olduğuna göre:*

a) *Bu prizmanın açık şeklini çiziniz;*
b) *Yanal alanını ve bütün alanını hesaplayınız.*
Cevap: $Y = 240$ cm^2; $S = 288$ cm^2

7. *Tabanı eşkenar dörtgen olan bir prizmanın yanal yüzleri karelerden ibarettir. Tabanın köşegenleri* 12 cm *ve* 16 cm *olduğuna göre, bu prizmanın yanal alanını ve bütün alanını hesaplayınız.*

Cevap: $Y = 400$ cm^2 ; $S = 592$ cm^2.

8. *Köşegeni* $10\sqrt{3}$ *olan bir kübün alanını bulunuz* ($S = 600$).

9. *Bir dik dörtgenler prizmasının bir köşeden çıkan üç ayrıtı birbirini takip eden üç tek sayıdır. Bu dik dörtgenler prizmasının köşegeni* $\sqrt{35}$ cm *olduğuna göre alanını bulunuz.* (Cevap: $S = 46$ cm^2)

10. *Altıgen düzgün bir prizmanın bir kenarı* 5 cm *ve yüksekliği* 10 cm *dir. Bu prizmanın açılmış şekli ile yanal ve bütün alanını bulunuz.*

PRİZMANIN HACMI

119. Tanımlar. — Bir cismin uzayda kapladığı yere bu cismin *hacmı* denildiğini birinci kitapta gördük. Burada hacımların ölçülmesini göreceğiz:

Bir hacmı ölçmek demek, seçilen bir birim hacmın, verilen hacım içerisinde kaç defa bulunduğunu aramak demektir. Bulunacak sayıya bu hacmın *ölçümü* denir.

Kenarı birim olarak alınan her küb, hacım birimi olabilir. Pratikte:

$$\text{mm}^3\ ,\ \text{cm}^3\ ,\ \text{dm}^3\ ,\ \text{m}^3\ ,\ \text{dam}^3\ ,\ \text{hm}^3\ ,\ \text{km}^3$$

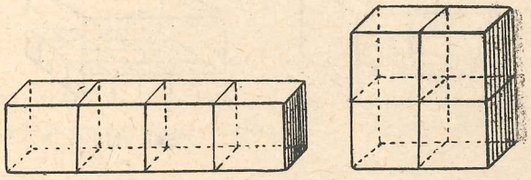
hacım birimi olarak kullanılır.

Ölçümleri eşit olan iki hacım eşittir.

Çünkü her ikisinde de birim küblerden aynı mikdarda var demektir.

Karşıt olarak, eşit iki hacmın ölçümleri de eşittir.

Hacımları eşit olan cisimlerin şekilleri başka başka olabilir. Böyle iki cisme *eşdeğerli* veya *denk* cisimler denir.



Şek. 118

Meselâ: Şek. 118deki iki prizma eşit değildir, fakat eşdeğerlidir. Çünkü her birinin hacmı 4 cm^3 dür.

İki cismin eşdeğerli olduğunu göstermek için aralarına $\eqsim$ işareti konur.

Dik dörtgenler prizmasının hacmı:

120. Teorem. — **Bir dik dörtgenler prizmasının hacmı, üç boyutunun çarpımına eşittir** [*].

İspatı:

1. hal: *Boyutlar tam sayıdır.* — Seçilen bir u uzunluk birimi cinsinden boyutlar:

$$5u\ ,\quad 4u\ ,\quad 3u$$

olsun (Şek. 119). Bu dik dörtgenler prizmasının tabanı

$$5 \cdot 4 = 20 \quad \textit{birim kare}\text{'ye}$$

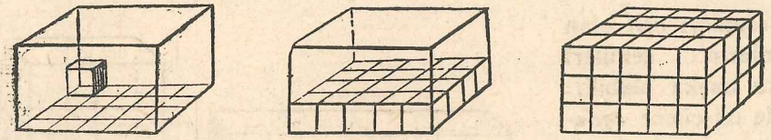
ayrılır. Her kare üzerine bir «birim küb» oturtularak

$$5 \cdot 4 = 20 \quad \textit{birim küb}\text{'lük}$$

[*] Bu ifadeden maksat şudur: «Bir dik dörtgenler prizmasının hacmının ölçümünü gösteren sayı, boyutların ölçümlerini gösteren sayıların çarpımına eşittir.»

bir tabaka elde edilir. Yükseklik $3u$ olduğundan verilen dik dörtgenler prizması içinde bu tabakadan 3 tane vardır. Şu halde bu prizmanın «u birim küb» cinsinden hacmı:

$$V = 5 \cdot 4 \cdot 3 \quad \text{tür.}$$



Şek. 119

2. hal: *Boyutlar kesirli sayıdır.* — u uzunluk birimi cinsinden boyutlar:

$$\frac{5}{6}u, \quad \frac{2}{3}u, \quad \frac{1}{2}u$$

olsun. Paydaları eşitlenirse:

$$\frac{5}{6}u, \quad \frac{4}{6}u, \quad \frac{3}{6}u$$

olur. $u' = \frac{u}{6}$ olmak üzere seçilen bir u birimi cinsinden boyutların ölçümü:

$$5u' \ , \quad 4u' \ , \quad 3u'$$

olacağından bu prizmanın «u' *birim küb*» cinsinden hacmı:

$$V = 5 \cdot 4 \cdot 3 \quad \text{tür.}$$

«u birim küb» içerisinde «u' birim küb» lerden «$6 \cdot 6 \cdot 6$» tane bulunduğundan, bu dik dörtgenler prizmasının «*u birim küb*» cinsinden hacmı:

$$V = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{dir.}$$

3. hal: *Boyutlar* $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{3}$ *gibi sayılardır.* — Bu halde bile, hacmın, bu üç boyutun çarpımına eşit olduğu ispat edilebilir. Biz bunu ispatsız olarak kabul edeceğiz.

Demek ki genel olarak boyutlar a, b, c ile gösterilirse bu dik dörtgenler prizmasının hacmı:

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$ olur.

121. İhtar. — Burada $a \cdot b$ çarpımı dik dörtgenler prizmasının taban alanı, c ise yüksekliği olduğundan:

$$\boxed{V = G \cdot h}$$

olarak yazılır. Şu halde yukardaki teoremi şöyle de ifade edebiliriz:

Bir dik dörtgenler prizmasının hacmı, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

122. Netice. — **Bir ayrıtı a olan bir kübün hacmı**

$$\boxed{V = a \cdot a \cdot a = a^3}$$ **dür.**

Dik prizmanın hacmı:

123. Teorem. — **Bir dik prizmanın hacmı, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.**

$$\boxed{V = G \cdot h}$$

İspatı:

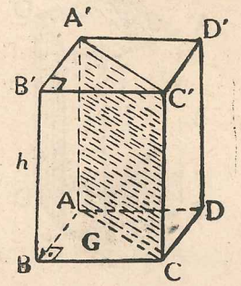
1. hal: *Taban bir dik üçgendir.* — Tabanı ABC $(\widehat{B} = 90°)$ dik üçgeni olan ABCA'B'C' dik prizması verilmiş olsun (Şek. 120). ABC dik üçgenini ABCD dik dörtgenine tamamlıyalım. AC köşegeni, bu dik dörtgeni iki eşit parçaya ayırdığından:

$$\text{ABC alanı} = \frac{1}{2} \text{ ABCD alanı}$$

olur. Tabanı ABCD ve yüksekliği $BB' = h$ olan ABCDA'B'C'D' dik dörtgenler prizmasının hacmı:

$$BC \cdot BA \cdot BB'$$

dür. (ACC'A') düzlemi, bu dik dörtgenler prizmasını iki eşit dik üçgen dik prizmaya ayırdığından (No. 105), ABCA'B'C' dik üçgen dik prizmasının hacmı:

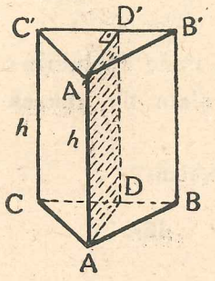


Şek. 120

$$V = \frac{1}{2} BC \cdot BA \cdot BB' \quad \text{olur.}$$

« $\frac{1}{2} BC \cdot BA$ » çarpımı, ABC dik üçgeninin G taban alanını verdiğinden:

$$V = G \cdot h \quad \text{elde edilir.}$$



Şek. 121

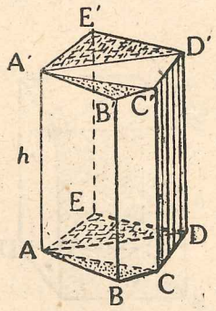
2. hal: *Taban her hangi bir üçgendir.* — Tabanı ABC üçgeni olan ABCA'B'C' dik prizması verilmiş olsun (Şek. 121). AA' ayrıtından geçen ve karşı yüze dik olan (ADD'A') düzlemi, bu üçgen prizmayı iki tane dik üçgen dik prizmaya ayırır. Yükseklikleri aynı olan bu dik üçgen dik prizmaların hacımları toplamı, ABCA'B'C' dik prizmasının hacmını vereceğinden:

$$V = (\text{ABD alanı} + \text{ADC alanı}) \cdot AA'$$

$$V = \text{ABC alanı} \cdot AA'$$

$$V = G \cdot h$$

elde edilir.



Şek. 122

3. hal: *Taban her hangi bir çokgendir.* — ABCDEA'B'C'D'E' dik prizması verilmiş olsun (Şek. 122). AA' ayrıtı ile diğer yanal ayrıtlardan geçen düzlemler, bu prizmayı birtakım üçgen dik prizmalara ayırır. Yükseklikleri aynı olan bu üçgen dik prizmaların hacımları toplamının, çokgen prizmanın hacmını vereceği düşünülürse:

$$V = G \cdot h$$

bulunur.

Eğik prizmanın hacmı:

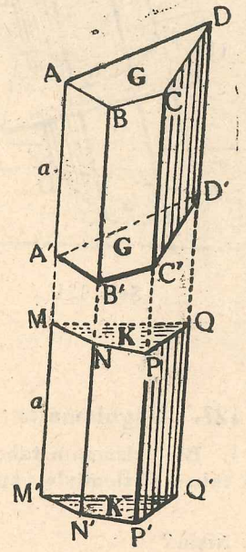
124. Teorem. — Bir eğik prizma, bunun dik kesitini taban ve yanal ayrıtını yükseklik olarak alan dik prizmaya eşdeğerlidir.

İspatı: Verilen ABCDA'B'C'D' eğik ptizmasının AA' ayrıtının uzantısında $MM' = AA' = a$ olmak üzere alınan M ve M' noktalarından geçen MNPQ ye M'N'P'Q' dik kesitlerini çizelim (Şek. 123); MNPQM'N'P'Q' dik prizması elde edilir.

Burada meydana gelen ABCDMNPQ ve A'B'C'D'M'N'P'Q' cisimleri eşittir. Çünkü birinci cisim $AA' = a$ kadar kaydırılırsa ikinci cisim ile üst üste gelir. Bu cisimlerin hacmından MNPQA'B'C'D' cisminin hacmı çıkarılırsa geri kalan hacımlar eşit olacağından:

$$ABCDA'B'C'D' \cong MNPQM'N'P'Q'$$

olur.



Şek. 123

125. Netice. — Bir eğik prizmanın hacmı, dik kesitinin alanı ile bir yanal ayrıtının çarpımına eşittir.

Gerçekten, (AD') eğik prizmasının hacmı, (MQ') dik prizmasının hacmına eşit olduğundan:

$$V = \text{MNPQ alanı} \cdot a$$

$$\boxed{V = K \cdot a}$$

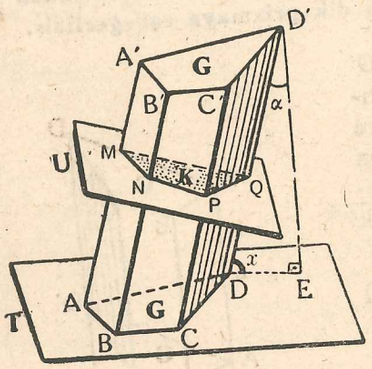
bulunur.

126. Teorem. — Bir eğik prizmanın hacmı, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.

İspatı: MNPQ dik kesitinin alanı K ve $AA' = a$ olsun (Şek. 124).

$V = K \cdot a$ dır.

ABCD taban düzlemine D'E dikmesini çizelim; $\widehat{DD'E} = \alpha$ açısı, taban ve dik kesit düzlemleri arasındaki açıya eşittir (No. 79). Şu halde K dik kesit alanı, G taban alanının dik kesit düzlemi üzerindeki izdüşümü olarak düşünülürse:



Şek. 124

$$K = G \cdot \cos\alpha$$

yazılır (No. 97). Öteyandan DD'E dik üçgeninde

$$\cos\alpha = \frac{D'E}{D'D} = \frac{h}{a}$$

olduğundan:

$$V = K \cdot a = G \cdot \cos\alpha \cdot a = G \cdot \frac{h}{a} \cdot a$$

veya

$$\boxed{V = G \cdot h}$$ bulunur.

127. Uygulamalar:

1. Bir prizmanın taban alanı G, dik kesitinin alanı K ve yanal ayrıtların taban düzlemiyle yaptığı açı x olduğuna göre:

$$K = G \cdot \sin x$$

olur. Niçin?

Çözüm: $K = G \cdot \cos\alpha$ idi (Şek. 124). DD'E dik üçgeninde $\widehat{x} + \widehat{\alpha} = 90°$ olduğu görülürse $\cos\alpha = \sin x$ olur. Buradan

$$K = G \cdot \sin x$$ bulunur.

2. Bir prizmanın dik kesiti iç yarıçapı R olan bir teğetler çokgeni ise bu prizmanın hacmı, yanal alanı ile iç yarıçapın çarpımının yarısına eşittir. Niçin?

Çözüm: Bu teğetler çokgeninin alanı K, çevresi U olduğuna göre:

$K = \frac{1}{2} U \cdot R$ dir. Halbuki «No. 125» gereğince prizmanın hacmı:

$$V = K \cdot a$$

olduğundan, K yerine yukardaki eşidi yazılırsa:

$$V = \frac{1}{2} U \cdot R \cdot a$$

olur. «$U \cdot a$» çarpımı, prizmanın yanal alanını vereceğinden:

$$V = \frac{1}{2} Y \cdot R$$

bulunur.

3. Bir üçgen prizmanın hacmı, bir yanal yüzünün alanı ile bu yüzün karşısındaki ayrıta olan uzaklığı çarpımının yarısına eşittir. Niçin?

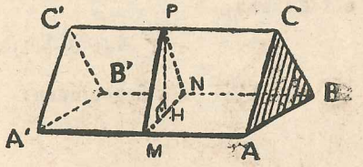
Çözüm: ABCA'B'C' üçgen prizmasının MNP dik kesitini alalım (Şek. 125); bu dik kesitin PH yüksekliği, CC' ayrıtının ABB'A' yüzüne olan uzaklığıdır. Öyleyse

$$V = \frac{1}{2} \cdot PH \cdot MN \cdot AA'$$

olur (No. 125). Burada MN·AA' çarpımı ABB'A' yüzünün alanını vereceğinden:

$$V = \frac{1}{2} (ABB'A' \text{ alanı}) \cdot PH$$

bulunur.



Şek. 125

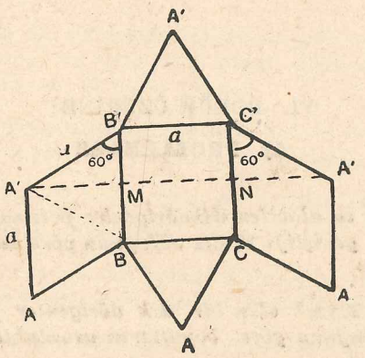
4. Bir üçgen prizmanın ABC tabanı bir kenarı a olan eşkenar üçgen, BCC'B' yüzü kare, diğer iki yanal yüzü birer açıları 60° olan paralelkenardır. Bu prizmanın:

a) Açık şeklini çiziniz.

b) A' köşesinden geçen dik kesit, diğer yanal ayrıtları hangi noktalarda keser?

c) Yanal ve bütün alanını bulunuz.

d) Hacmını ve yüksekliğini bulunuz.



Şek. 126

Çözüm: a) Bu prizmanın açık şekli «Şek. 126» da görülmektedir.

b) A'MN dik kesitinin kenarları, prizmanın açık şeklinde yanal ayrıtlara dik olan bir doğru durumunu alırlar. Dikkat edilirse M noktası BB' nün, N noktası da CC' nün ortası olur.

c) A'MN dik kesitinde (Şek. 127):

$$A'M = A'N = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad , \quad MN = a$$

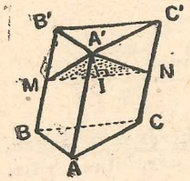
olduğundan:

$$Y = (\sqrt{3}+1)a^2 \; ; \; S = \frac{1}{2}(3\sqrt{3}+2)a^2$$

d) A'MI dik üçgeninden:

$$\overline{A'I}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$A'I = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Şek. 127

bulunur. Şu halde A'MN dik kesitinin alanı:

$$K = \frac{1}{2} MN \cdot A'I = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

olacağından bu prizmanın hacmı:

$$V = K \cdot a = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$$

olur. Yüksekliği:

$$h = \frac{V}{G} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4} : \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\, a$$

bulunur.

VI. BÖLÜM ÜZERİNE:

A) PROBLEMLER

1. *342 hektolitre su alabilen dikdörtgenler prizması şeklindeki bir havuzun uzunluğu* 4,50 m, *genişliği* 38 dm *olduğuna göre derinliği ne kadardır?*

(Cevap: 2 m.)

2. *Bütün alanı* 288 m² *olan bir dik dörtgenler prizmasının boyutları* 2, 3, 6 *ile orantılı olduğuna göre, boyutların uzunlukları ve hacmını hesaplayınız.*

Cevap: 4 m, 6 m, 12 m; $V = 288$ m³.

3. *Tabanının bir kenarı* a *olan kare prizmanın yanal ayrıtının uzunluğu* l *ve bu ayrıtların taban düzlemiye yaptığı açı* 60° *olduğuna göre bu eğik prizmanın hacmını ve sonra dik kesitinin alanını hesaplayınız.*

(Uygulama: $a = 4$ cm, $l = 6$ cm.)

Cevap: $V = 48\sqrt{3}$ cm³; $K = 8\sqrt{3}$ cm².

4. *Tabanının bir kenarı* a *olan eşkenar üçgen dik prizma, bir ayrıtı* a *olan kübe eşdeğerli olduğuna göre bu prizmanın yüksekliğini hesaplayınız.*

(Cevap: $h = \frac{4a}{\sqrt{3}}$)

5. *Tabanları* 7 cm, 4 cm *ve bu tabanlara dik olan kenarı* 4 cm *olan bir dik yamuğu taban olarak kabul eden ve yüksekliği* 6 cm *olan dik prizmanın hacmını ve bütün alanını hesaplayınız.* (Cevap: V=132 cm²; S=164 cm²)

6. *Her hangi bir üçgen prizmada:*

a) *Her iki yanal yüzün alanları eşit olursa, bu yüzlerin diğer yanal yüzle teşkil ettiği ikidüzlemli açılar eşit olur;*

b) *Alanı en büyük olan yanal yüzün karşısındaki iki düzlemli açı en büyük olur;*

c) *Her hangi bir yanal yüzün alanı, diğer ikisinin alanları toplamından küçük olur. Niçin?*

(Y. g.) Bu prizmanın dik kesit üçgenini göz önüne alınız.

7. *Aynı tabana ve eşit yanal ayrıta malik olan prizmalar arasında hacmı en büyük olan hangisidir?*

8. *Kenar uzunluğu* $(a + b)$ *olan bir kübü ele alarak:*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

özdeşliğinin doğruluğunu gösteriniz.

9. 4,41 mm *kalınlığında dik dörtgenler prizması şeklindeki bir saç levha haddeden geçirildikten sonra eni ve boyu* % 5 *kadar artmıştır. Elde edilen yeni levhanın kalınlığını bulunuz.* (Cevap: 4 mm.)

10. *Bir dik dörtgenler prizmasının boyutları* 2, 3, 4 *ile orantılıdır. Bu prizmanın hacmı* 5184 cm³ *olduğuna göre boyutlarını bulunuz.* (C.: 12, 18, 24.)

11. *Köşegeninin uzunluğu* 34,64 cm *olan bir kübün hacmını bulunuz.* $\sqrt{3} = 1{,}732$ alınacaktır. (Cevap: 8000 cm³.)

12. *Yanal ayrıtı* 10 cm, *bu ayrıtın taban düzlemiyle yaptığı açı* 30° *ve taban alanı* 36 cm² *olan bir paralelyüzün hacmını bulunuz.* (C.: 180 cm³)

13. *Bir üçgen prizmanın dik kesiti, kenarı* 2 cm *olan bir eskenar üçgen, yanal ayrıtı* 5 cm *ve bu ayrıtın taban düzlemiyle yaptığı açı* 60° *dir. Bu prizmanın:* a) *Hacmını* b) *Yüksekliğini;* c) *Taban alanını;* d) *Yanal alanını bulunuz.* (Cevap: $V = 5\sqrt{3}$ cm³; $h = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; $G = 2$ cm²; $Y = 30$ cm²)

14. *Eşdeğerli iki prizmanın birinin tabanı eşkenar üçgen, diğerinin tabanı düzgün altıgendir; tabanların çevrel çemberlerinin yarıçapları aynı olduğuna göre, bu prizmaların yüksekliklerinin oranını bulunuz.* ($\frac{2}{1}$ dir.)

15. *Tabanı eşkenar dörtgen olan bir prizmanın taban köşegenleri* AC=8 cm, BD=6 cm *dir.* AA'C *üçgeni bir eşkenar üçgen olup, bu üçgenin düzlemi taban düzlemine diktir. Bu prizmanın:*

a) *Yüksekliğini;* b) *Hacmını;* c) *Dik kesitinin alanını bulunuz.*

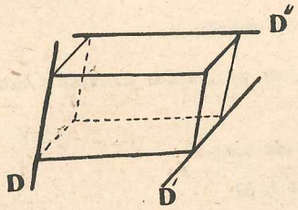
(**Cevap:** $h = 4\sqrt{3}$ cm; $V = 96\sqrt{3}$ cm³; $K = 12\sqrt{3}$ cm².

16. *Tabanının bir kenarı* 2 cm *olan düzgün sekizgen dik prizmanın yanal alanı* 64 cm² *olduğuna göre bu prizmanın hacmını bulunuz.*

Cevap: $32(\sqrt{2}+1)$ cm³.

B) ÇİZİM PROBLEMLERİ

17. *İkişer ikişer aykırı durumda olan* D, D', D'' *doğruları veriliyor. Üç ayrıtı bu doğrular üzerinde bulunmak üzere bir paralelyüz çiziniz* (Şek. 128).



Şek. 128

18. *Bir noktadan çıkan ve üçü de aynı düzlemde bulunmıyan* Ax, Ay, Az *doğruları ile bunların dışında bir* C' *noktası veriliyor. Bir köşegeni* AC' *olmak ve üç ayrıtı* Ax, Ay, Az *doğruları üzerinde bulunmak üzere bir paralelyüz çiziniz.*

19. *Bir üçgen prizmayı bir yanal yüzüne paralel öyle bir düzlemle kesiniz ki bu prizma denk iki parçaya ayrılsın.*

20. *Bir üçgen dik prizmayı, tabanın bir kenarı üzerinde verilen bir noktadan geçen ve tabanları dik olan öyle bir düzlemle kesiniz ki bu prizma denk iki parçaya ayrılsın.*

21. *Bir paralelyüzü, bir ayrıtından geçen öyle iki düzlemle kesiniz ki bu paralelyüz denk üç parçaya ayrılsın.*

BÖLÜM VII

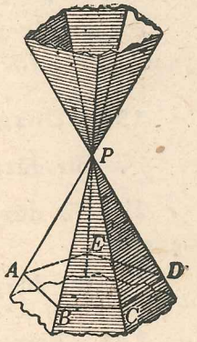
PİRAMİTLER

128. Piramidal yüzey. — Bir ABCDE çokgeni ile bunun düzlemi dışında bir P noktası verildiğinde, P den geçen ve çokgenin kenarlarına dayanarak hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye *piramidal yüzey* denir (Şek. 129).

Hareket eden doğruya *ana doğru*, ABCDE çokgenine *doğrultman* ve P noktasına da piramidal yüzeyin *tepesi* denir.

129. Piramit. — Bir piramidal yüzeyin bir kanadı ile, bütün anadoğruları kesen bir düzlem tarafından sınırlanan cisme *piramit* denir.

Bu piramidal yüzeyin tepesi piramidin de *tepesi* olur.

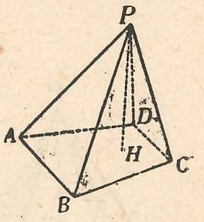


Şek. 129

ABCD kesit çokgenine piramidin *tabanı*; PA, PB, PC, PD ye *yanal ayrıtları*; AB, BC, CD, DA ya *taban ayrıtları*; PAB, PBC, .. üçgenlerine piramidin *yanal yüzleri*; bu yüzlerin alanları toplamına *yanal alan*; taban alanı ile yanal alanın toplamına *bütün alan* denir (Şek. 130).

Bir piramit, önce tepesi sonra tabanının köşeleri yazılarak gösterilir. Tepe ile taban arasına bir nokta koymak faydalı olur.

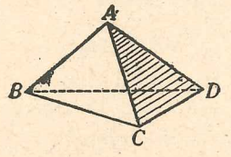
Tepenin taban düzlemine olan uzaklığına piramidin *yüksekliği* denir.



Şek. 130

Not: Bir piramitte yüksekliği h, yanal alanı Y, taban alanını G, bütün alanı S ile ve hacmı V ile göstereceğiz.

130. Piramit çeşitleri. — Piramitler tabanlarına göre isim alırlar; üçgen piramit, dörtgen piramit, beşgen piramit,... gibi.



Şek. 131

Bir üçgen piramit, dört tane üçgen ile sınırlanmış bir cisim olduğundan, buna, çok kere *dörtyüzlü* adı verilir. Bir dörtyüzlüde her yüz, taban olarak alınabilir (Şek. 131).

131. Düzgün piramit.— Tabanı düzgün çokgen olan ve yüksekliği taban merkezinden geçen piramide *düzgün piramit* denir. Şek. 132 de bir beşgen düzgün piramidin kapalı ve açık şekli görülmektedir.

Bir düzgün piramitte bir yanal yüzün tepeden geçen yüksekliğine *yanal yükseklik* adı verilir. Bunu y ile göstereceğiz.

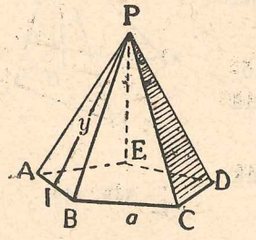
132. Düzgün piramidin özellikleri:

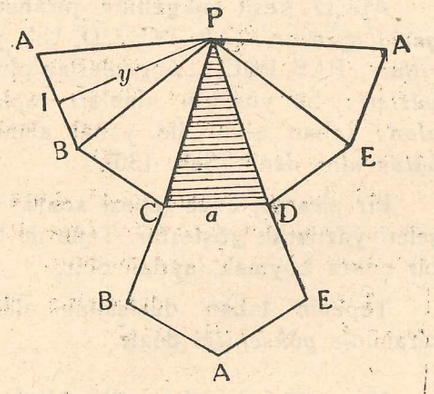
1°. Bir düzgün piramidin yanal ayrıtları eşittir.

2°. Bir düzgün piramidin yanal yüzleri eşit birer ikizkenar üçgendir.

3°. Bir düzgün piramitte yanal yükseklikler aynı uzunluktadır.

133. Teorem. — **Bir düzgün piramidin yanal alanı, taban çevresi ile yanal yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.**





Şek. 132

Yol gösterme: PAB ikizkenar üçgeninin alanı $\frac{1}{2}a \cdot y$ dir (Şek. 132). Böyle n tane üçgen bulunduğunu düşünerek:

$$Y = \frac{1}{2} U \cdot y$$

olduğunu bulunuz. Burada U, piramidin taban çevresini göstermektedir.

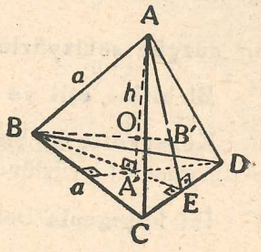
134. Düzgün dörtyüzlü. — Altı ayrıtı birbirine eşit olan üçgen piramide *düzgün dörtyüzlü* denir (Şek. 133).

Bir düzgün dörtyüzlünün yüzleri birbirine eşit eşkenar üçgenlerdir.

Bir eşkenar üçgenin merkezi, kenarortayların (= yüksekliklerin = açıortayların) kesim noktasıdır ve bu nokta her kenarortayı $\frac{2}{1}$ oranında içten böler. BCD eşkenar üçgeninde:

$$BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad BA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

tür. ABCD düzgün dörtyüzlüsünün AA' yüksekliği, AA'B dik üçgeninden:



Şek. 133

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BA'}^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

bulunur.

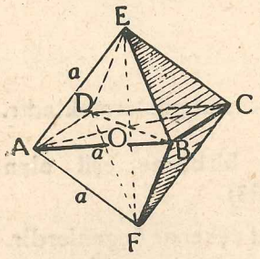
Bir düzgün dörtyüzlünün alanı: $S = a^2\sqrt{3}$ olur.

135. Sorular:

1. Bir düzgün dörtyüzlünün karşılıklı ayrıtları birbirine dik durumludur. Niçin? [Şek. 133 CD nin (ABE) düzlemine dik olacağını görünüz.]

2. Bir düzgün dörtyüzlüde yükseklikler aynı noktadan geçerler; bu nokta her yüksekliği $\frac{3}{1}$ oranında böler. Niçin?

136. Düzgün sekizyüzlü. — Bütün ayrıtları a uzunluğunda olan iki kare piramit taban tabana yapıştırılır ve ortak taban kaldırılırsa elde edilen cisme *düzgün sekizyüzlü* denir.



Şek. 134

Bir düzgün sekizyüzlünün yüzleri, birbirine eşit eşkenar üçgenlerdir (Şek. 134).

ABCD karesinde $AC = a\sqrt{2}$,

$OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ dir. AOE dik üçgeninde

$OE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ olduğu kolayca hesaplanır.

Tanım gereğince $OE = OF$ dir. Bunlara göre

$$AC = BD = EF$$

olacağı anlaşılır. Demek ki:

Bir düzgün sekizyüzlüde:

1°. Birbirine eşit ve ikişer ikişer dik olan üç köşegen vardır.

2°. Köşegenler birbirini orta noktalarında keserler. Bu O noktasına düzgün sekizyüzlünün *merkezi* denir.

3°. İki köşegenin belirttiği düzlemle arakesit bir karedir.

Bir düzgün sekizyüzlünün alanı: $S = 2\sqrt{3}\cdot a^2$ olur.

Not: Yüzleri eşit düzgün çokgenler olup, her hangi iki komşu yüzünün açısı aynı değerde olan bir cisme *düzgün cisim* veya *düzgün çokyüzlü* denir. Düzgün çokyüzlüler ancak 4, 6, 8, 12, 20 yüzlü olmak üzere beş tanedir. Biz, bunlardan sadece ilk üçünü gördük. (Düzgün altıyüzlü cisim, bir kübdür.)

PRAMİDİN BİR DÜZLEMLE KESİLMESİ

137. Teorem. — Bir piramit, tabana paralel bir düzlemle kesilirse:

1°. Kesit çokgeni tabana benzerdir.

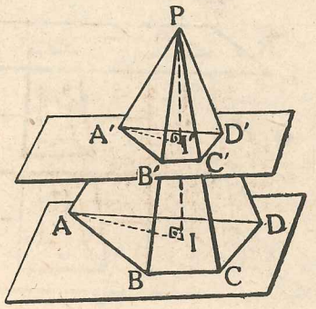
2°. Kesit alanının taban alanına oranı, bunların tepeden olan uzaklıklarının karelerinin oranına eşittir.

İspatı: 1°. P. ABCD piramidinin tabana paralel kesiti A′B′C′D′ olsun (Şek. 135). A′B′C′D′, ABCD çokgenlerinde karşılıklı kenarlar paralel (No. 35), karşılıklı açılar eşit olur (No. 42).

Her yanal yüze Tales teoremi uygulanırsa:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

elde edilir. Şu halde bu iki çokgen birbirine benzerdir.



Şek. 135

2°. Bu iki çokgenin tepeden olan uzaklıkları PI′, PI olsun; benzer iki çokgenin alanlarının oranı, benzerlik oranının karesine eşit olduğundan:

$$\frac{G'}{G} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}$$ olur. Halbuki:

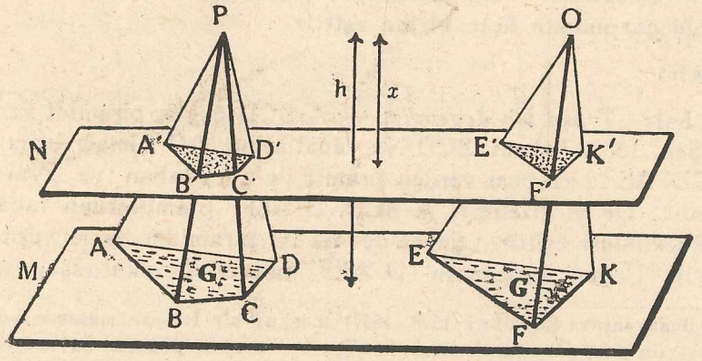
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PA} = \frac{PI'}{PI}$$ olduğundan

$$\frac{G'}{G} = \frac{\overline{PI'}^2}{\overline{PI}^2}$$ bulunur.

138. Netice. — Tabanları denk, yükseklikleri eşit olan iki piramidin tabana paralel ve tepeden aynı uzaklıktaki kesitleri de birbirine denktir. Yani:

$A'B'C'D'$ alanı $= E'F'K'$ alanı

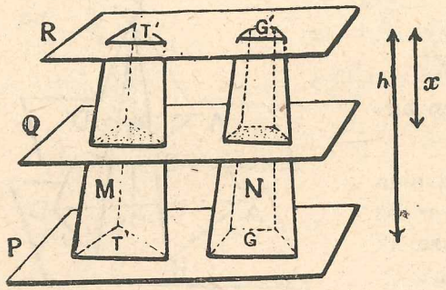
dır (Şek. 136).



Şek. 136

PİRAMİDİN HACMI

139. Kavaliyeri (Cavalieri) **postulâtı. — Tabanları eşdeğerli ve yükseklikleri eşit olan iki cismin tabanlarına paralel ve tabandan aynı uzaklıktaki kesitleri daima eşdeğerli olursa, bu iki cismin hacımları eşit olur [*].**



Şek. 137

Açıklama: Yükseklikleri eşit olan (M) ve (N) cisimlerinde (Şek. 137);

Alt tabanlar eşdeğerli ($T = G$),

Üst tabanlar eşdeğerli ($T' = G'$)

Ve tabandan x kadar uzaktaki kesitler, x ne olursa olsun eşdeğerli ise, Kavaliyeri postulâtı bu cisimlerin hacımlarının eşit olduğunu ifade etmektedir.

140. Teorem. — Tabanları eşdeğerli ve yükseklikleri eşit olan iki piramidin hacımları birbirine eşittir (Şek. 138).

İspatı: «No. 38» göz önünde tutulursa, Kavaliyeri postulâtı gereğince, P · ABCD ve O · EFK piramitlerinin hacımları eşit olur.

141. Teorem. — Bir piramidin hacmı, tabanının alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

İspatı:

1. hal: *Taban bir üçgendir.* — A·BCD üçgen piramidi verilmiş olsun (Şek. 138). Tabanı BCD ve yanal ayrıtı AC olmak üzere çizilen BCDFAE pirizması verilen pramit ile aynı taban ve aynı yüksekliktedir. DF yi çizelim; A·BCD, D·AEF pramitlerinin tabanları ve yükseklikleri eşittir. Şu halde bu iki piramidin hacmı eşit olur (No. 140) Üçgen prizmanın D·AEF pramidini çıkarırsak, geriye

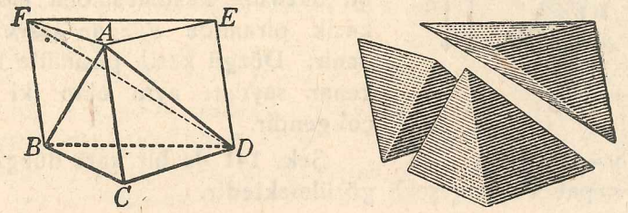
[*] Bonaventura Cavalieri (1598 - 1657) meşhur bir İtalyan matematikçisidir. Kavaliyeri'nin postulât olarak ileri sürdüğü bu önerme, yüksek matematik yardımiyle ispat edilebilmektedir. Onun için bu önermeye «Kavaliyeri teoremi» diyebiliriz.

paralelkenar tabanlı D.ACBF piramidi kalır. Bu da D.ABC, D.ABF üçgen piramitlerine ayrılır. Bu iki üçgen piramidin hacımları da eşittir.

Demek ki üçgen prizma, verilen piramide eşdeğerli üç tane piramide ayrılabilmektedir. Buna göre A.BCD piramidinin hacmı:

$$V = \frac{1}{3} G.h$$

olur.

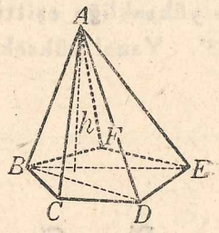


Şek. 138

2. hal: *Taban bir çokgendir.* — A.BCDEF çokgen piramidi verilmiş olsun (Şek. 139). Tabanın bir köşeden çıkan köşegenleri ile tepenin belirttiği düzlemler, bu piramidi birtakım üçgen piramitlere ayırır. Bu üçgen piramitlerin hacımları toplamının, çokgen piramidin hacmını vereceği düşünülürse:

$$V = \frac{1}{3} G . h$$

bulunur.



Şek. 139

142. Neticeler:

I. — Tabanları denk iki piramidin hacımlarının oranı, yüksekliklerinin oranına eşittir.

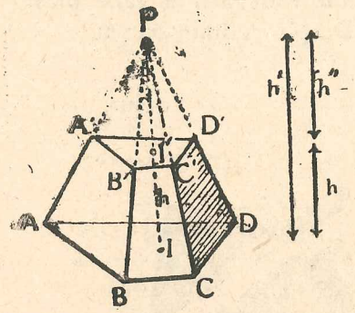
II. — Yükseklikleri eşit iki piramidin hacımlarının oranı, tabanlarının oranına eşittir.

KESİK PİRAMİT [*]

143. Tanım — Bir piramidi tabana paralel bir düzlemle kestiğimizde, taban ile düzlem arasında kalan kısma *kesit piramit* denir. ABCDA'B'C'D' cismi bir kesik piramittir (Şek. 140).

[*] Bu konu, yeni programa konmamıştır. Fakat öğrenilmesi kolay olduğundan, pratikteki önemini göz önüne alarak, buraya bir tatbikat olarak koydum.

Birbirine benzer olan ABCD, A′B′C′D′ çokgenlerine kesik piramidin *tabanları* denir.



Şek. 140

İki taban arasındaki uzaklığa *yükseklik*; AA′, BB′, CC, DD′ ye *yanal ayrıtlar*; ABB′A′, BCC′B′,... yamuklalarına *yanal yüzler* adı verilir.

144. Düzgün kesik piramit. — Düzgün bir piramidin tabana paralel bir düzlemle kesilmesinden elde edilen kesik piramide *düzgün kesik piramit* denir. Düzgü kesik piramitte tabanlar, kenar sayıları aynı olan iki düzgün çokgendir.

Şek. 141 de bir kare düzgün kesik piramidin kapalı ve açık şekli görülmektedir.

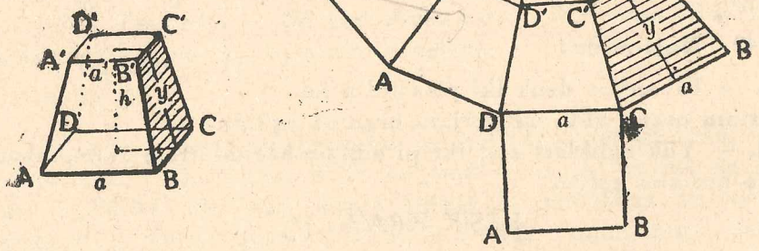
145. Düzgün kesik piramidin özellikleri:

Bir düzgün kesik piramitte:

1°. Yanal yüzler birbirine eşit ikizkenar yamuklardır.

2°. Taban merkezlerini birleştiren doğru parçası, tabanlara dik olup yüksekliğe eşittir.

3°. Yanal yükseklikler aynı uzunluktadır.



Şek. 141

146. Teorem. — Bir düzgün kesik piramidin yanal alanı, alt ve üst tabanların çevreleri toplamının yarısı ile yanal yüksekliğin çarpımına eşittir.

Yol gösterme: BCC′B′ ikizkenar yamuğunun alanı $\frac{1}{2}(a + a') \cdot y$ dir (Şek. 141). Böyle n tane yamuk bulunduğunu düşünerek:

$$Y = \frac{1}{2}(U + U') \cdot y$$

olduğunu bulunuz.

Ödevler:

1. Tabanının bir kenarı 6 cm olan bir düzgün kare piramidin yüksekliği 4 cm dir. Bu piramidin yanal ve bütün alanını bulunuz.

2. Tabanının bir kenarı $2\sqrt{3}$ cm olan bir altıgen düzgün piramidin yüksekliği 4 cm dir. Bu piramidin yanal ve bütün alanını bulunuz.

3. Yukardaki iki piramit tepeden 1 cm uzaklıktaki bir düzlemle kesiliyor; elde edilen düzgün kesik piramitlerin yanal ve bütün alanlarını bulunuz.

4. Tabanının bir kenarı 6 cm ve yüksekliği 8 cm olan bir kare piramidi tabana paralel öyle bir düzlemle kesiniz ki kesit alanı 2,25 cm² olsun.

Kesik piramidin hacmı:

147. Teorem. — Tabanlarının alanları G, G' ve yüksekliği h olan bir kesik piramidin hacmı:

$$V = \frac{h}{3}(G + G' + \sqrt{G \cdot G'})$$

dür.

İspatı: Verilen kesik piramit, iki piramidin farkı olarak düşünülürse:

$$V = \frac{1}{3} G(h + h') - \frac{1}{3} G'h'$$

$$V = \frac{3}{4}[G \cdot h + (G - G')h']$$

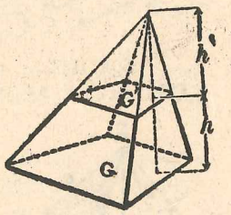
yazılır (Şek. 142). Halbuki:

$$\frac{h'^2}{(h+h')^2} = \frac{G'}{G} \quad \text{veya} \quad \frac{h'}{h+h'} = \frac{\sqrt{G'}}{\sqrt{G}}$$

dir (No. 137). Buradan

$$h' = \frac{h\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}}$$

bulunur ve yerine yazılırsa:



Şek. 142

$$V = \frac{1}{3}\left[G \cdot h + (G - G') \frac{h\sqrt{G'}}{\sqrt{G} - \sqrt{G'}} \right] = \frac{h}{3}(G + G' + \sqrt{G \cdot G'})$$

elde edilir.

Not: Bir kesik piramitte bir tabanın alanı G ve tabanların paralel iki kenarının oranı $\frac{a'}{a} = k$ verilecek olursa:

$$\frac{G'}{G} = \frac{a'^2}{a^2} = k^2 \quad \text{olduğundan} \quad G' = k^2 \cdot G$$

bulunur ve yerine konursa, hacım formülü:

$$V = \frac{G \cdot h}{3}(1 + k + k^2)$$

şeklini alır. Bu formül, kök almayı gerektirmediğinden, daha kullanışlıdır.

Ödevler:

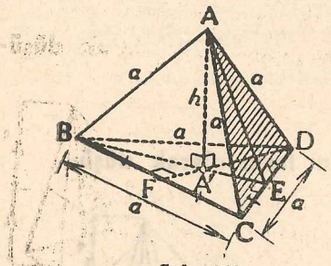
1. Tabanlarının kenarları 3 cm, 2 cm olan kare kesik piramidin yüksekliği 6 cm dir; bu kesik piramidin hacmını bulunuz.
2. Alt tabanı 24 cm², yüksekliği 5 cm olan bir kesik piramidin tabanlarının benzerlik oranı $\frac{1}{2}$ dir; bu kesik piramidin hacmını bulunuz.

148. Uygulamalar:

1. Bir ayrıtı a olan düzgün dörtyüzlünün hacmını bulunuz.

Çözüm: Düzgün dörtyüzlüde $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $G = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

olduğundan (Şek. 143) bu dörtyüzlünün hacmı:



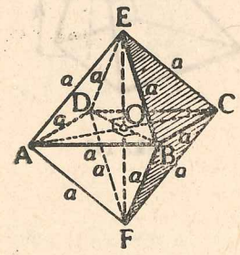
Şek. 143

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{18}}{36} \quad \text{veya}$$

$$\boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}} \quad \text{bulunur.}$$

2. Bir ayrıtı a olan düzgün sekizyüzlünün hacmını bulunuz.

Çözüm: E·ABCD kare piramidinin hacmının iki katı, düzgün sekizyüzlünün hacmını vereceğinden (Şek. 144):



Şek. 144

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot OE = \frac{2}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3} \quad \text{bulunur.}$$

3. Her hangi bir kesik üçgen dik prizmanın hacmı, üç yanal ayrıt toplamının üçte biri ile taban alanının çarpımına eşittir. Niçin?

İspatı: ABCDEF kesik dik prizmasında AD = a, BE = b, CF = c ve ABC alanı = G olarak verilmiş olsun DMN dik kesitini çizelim. Bu kesik prizma, ABCDMN dik prizması ile yamuk tabanlı D·EFNM piramidinin toplamından ibarettir. Şu halde bu kesik dik prizmanın hacmı:

$$V = G \cdot a + \frac{1}{3}(\text{MNFE alanı}) \cdot DI$$

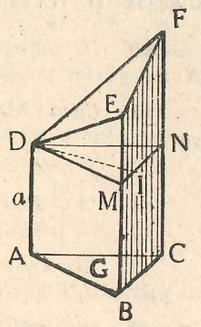
$$V = G \cdot a + \frac{1}{3} \cdot \frac{ME + NF}{2} \cdot MN \cdot DI$$

$$V = G \cdot a + \frac{b - a + c - a}{3} \cdot \frac{MN \cdot DI}{2}$$

$$V = G \cdot a + \frac{b + c - 2a}{3} \cdot G$$

$$\boxed{V = G \cdot \frac{a + b + c}{3}}$$

olur (Şek. 145).



Şek. 145

VII. BÖLÜM ÜZERİNE:

PROBLEMLER

1. *Bir kenarı a = 12 cm olan bir kübün merkezini tepe ve yüzlerini taban kabul eden kaç piramit vardır? Bu pramitler birbirine eşit midir? Bir tanesinin hacmını bulunuz.* (Cevap: V = 288 cm³)

2. *Boyutları* 2 cm, 3 cm, 4 cm *olan dik dörtgenler prizmasının merkezini tepe ve yüzlerini taban kabul eden pramitlerin alan ve hacımlarını bulunuz.* (Cevap: $S_1 \cong$ 25,92 cm²; $S_2 \cong$ 17,72 cm²; V = 4 cm³)

3. *Bir kare düzgün piramidin tabanının bir kenarı* 10 cm *ve bir yanal yüzün tabanla yaptığı açı* 60° *dir. Bu piramidin yanal alanını ve hacmını bulunuz.* (Cevap: Y = 200 cm²; $V \cong$ 288,67 cm³)

4. *Bir kare düzgün piramidin yüksekliği* 12 cm *ve yanal yüksekliği* 15 cm *dir. Bu piramidin bütün alanını ve hacmını bulunuz.* (864 cm²; 1296 cm³)

5. *Bir kare düzgün piramidin bütün alanı* 96 cm² *ve tabanının bir kenarı* 6 cm *dir. Bu piramidin hacmını bulunuz.* (Cevap: V = 48 cm³)

6. *Yüksekliği* 15 cm *olan bir piramit, tepeden* 5 cm *uzaklıkta bir düzlemle kesiliyor. Kesit alanı* 30 cm² *olduğuna göre bu piramidin taban alanını ve elde edilen kesik piramidin hacmını bulunuz.* (Cevap: V = 1300 cm³)

7. *Bir yanal ayrıtı taban düzlemine dik olan kare piramidin tabanının bir kenarı* 3 cm *ve yüksekliği* 4 cm *dir. Bu piramidin:*
   a) *Bütün yüzleri dik üçgen olur. Niçin?*
   b) *Açık şeklini çiziniz.*
   c) *Yanal alanını ve hacmını hesaplayınız.* (Cevap: 27 cm²; 12 cm³)

8. *Bir piramit, yanal ayrıtlarının orta noktalarından geçen bir düzlemle kesiliyor; elde edilen kesik piramit, küçük piramidin 7 katına denktir. Niçin?*
(Y. g.) Verilen piramit, küçük piramidin 8 katına denk olmalıdır.

9. *Bir piramit, tabana paralel bir düzlemle hacımları eşit iki parçaya ayrılmıştır; bu düzlem, piramidin yüksekliğini hangi oranda böler?* ($\sqrt[3]{2}=1{,}26$ alınacaktır). (Cevap: $\frac{50}{13}$).

10. *Her hangi bir piramitte taban alanı, yanal alandan küçük olur. Niçin?* (Yanal yüzlerin taban üzerindeki izdüşümlerini düşününüz.)

11. *Çapı* AD $= 2a$ *olan bir yarım çemberin içine çizilen* ABCD *düzgün yarım altıgenini taban kabul eden bir piramidin P tepesi, taban düzlemine* AD *nin* O *orta noktasından çıkılan dikme üzerinde olup* OP $= a\sqrt{3}$ *dür.*

a) $PA = PB = PC = PD$ *olduğunu gösteriniz.*

b) *Bu piramidin bütün alanını ve hacmını hesaplayınız.*

12. *Bir kesik altıgen düzgün piramidin tabanlarının birer kenarı* a, $2a$ *ve yüksekliği* $2a$ *dır. Bu piramidin:*

a) *Açık şeklini çiziniz.*

b) *Yanal alanını ve hacmını hesaplayınız.* ($Y = \frac{9\sqrt{19}}{2}a^2$; $V = \sqrt{3}a^3$.)

13. *Tabanları* $G = 36$ m² *ve* $G' = 25$ m² *olan bir kesik piramidin tabanlarına paralel iki düzlem, yüksekliği üç eşit parçaya bölüyor. Elde edilen kesitlerin alanlarını bulunuz.* (Cevap: $G_1 = \frac{256}{9}$ m²; $G_2 = \frac{289}{9}$ m²).

14. *Bir kesik piramitte:*

a) $V = 72{,}8$ m³, $h = 6$ m, $G + G' = 24{,}4$ m² *olarak veriliyor. G ve G' taban alanlarını bulunuz.* (Cevap: $G = 14{,}4$ m²; $G' = 10$ m².)

b) $V = 950$ m³, $h = 15$ m, $G - G' = 50$ m² *olarak veriliyor. G ve G' yü bulunuz.*

15. *Bir* ABC ($\widehat{A} = 90°$) *ikizkenar dik üçgeninde* AB $=$ AC $= a$ *dır.* B *ve* C *köşelerinden* (ABC) *düzlemine çıkılan dikmeler üzerinde aynı tarafa doğru* BB' $=$ CC' $= a$ *alınıyor:*

a) AB'C' *üçgeni ikizkenar olur. Niçin?*

b) A . BCC'B' *piramidinin açık şeklini çiziniz.*

c) *Aynı piramidin bütün alanını ve hacmını bulunuz.*

16. *Tabanının bir kenarı* a, *yüksekliği* $2a$ *olan bir düzgün kare piramidin içine bir küb çiziliyor. Kübün dört köşesi piramidin yanal ayrıtları üzerinde bulunuyor. Bu iki cismin hacımları ne orandadır?* (Cevap: $\frac{4}{9}$).

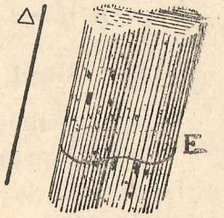
17. *Bir dörtyüzlüde bir ayrıtın orta noktası ile karşı ayrıttan geçen düzlem, bu dörtyüzlüyü denk iki parçaya ayırır. Niçin?*

18. *Bir düzgün dörtyüzlüde karşılıklı iki ayrıtın orta noktalarını birleştiren doğru parçası bu iki ayrıtın ortak dikmesidir. Niçin?*

BÖLÜM VIII

SİLİNDİR

149. Silindirik yüzey. — Bir (E) eğrisi ile bunun düzlemine paralel olmıyan bir Δ doğrusu verildiğinde, bu Δ doğrusuna paralel olan ve (E) eğrisine dayanarak hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye *silindirik yüzey* denir (Şek. 146).



Şek. 146

(E) eğrisine *doğrultman*, hareket eden doğruya da *ana doğru* adı verilir.

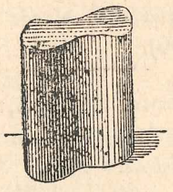
150. Silindir. — Bir silindirik yüzey ile, ana doğruları kesen paralel iki düzlem tarafından sınırlanan cisme *silindir* denir (Şek. 147).

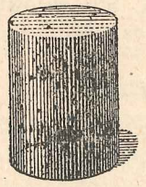
Bu paralel düzlemlerin silindirik yüzey içinde kalan parçalarına silindirin *tabanları*, tabanların çevrelerini birleştiren eğri yüzeye silindirin *yanal yüzeyi*, iki taban arasındaki uzaklığa da *yükseklik* denir.

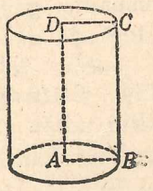
Not: Bir silindirin ana doğrusunu a, yüksekliğini h, yanal alanını Y, bütün alanını S ile ve hacmını V ile göstereceğiz.

Silindirler tabanlarına göre isim alırlar: *dairesel silindir*, *eliptik silindir*,... gibi.

Bu kitapta sadece dairesel silindirlerden bahsedilecektir. Onun için, bundan sonra «bir silindir» dediğimiz zaman onun «dairesel silindir» olduğu anlaşılmalıdır. Şek. 148 de bir dairesel silindir görülmektedir.


Şek. 147


Şek. 148



Şek. 149

151. Dik silindir. — Ana doğrusu tababa dik olan silindire *dik silindir* denir (Şek. 149).

Dik olmıyan bütün silindirlere *eğik silindir* veya sadece *silindir* denir.

Bir dik silindir, bir dik dörtgenin bir kenarı etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir. Bunun için, ekseriya, dik sailindir yerine *dönel silindir* denir. ABCD dik dörtgeni AD kenarı etrafında döndürülürse AB ve CD kenarları dönel silindirin tabanlarını, BC kenarı da yanal yüzeyini meydana getirir. BC ye bu dönel silindirin *ana doğrusu*, AD ye de dönel silindirin *ekseni* denir.

152. Silindirin özellikleri [*]:

1°. Bir silindirin ana doğruları birbirine paralel ve eşittir.

2°. Bir silindirin tabanları birbirine eşittir (Çünkü, tabanlardan birini bir ana doğruya paralel ve eşit olmak üzere kaydırırsak, diğer taban ile çakışır.)

3°. Bir dik silindirin ana doğrusu yüksekliğe eşittir.

4°. Bir silindirin iki ana doğrusundan geçen bir düzlemle kesiti bir paralelkenardır.

5°. Bir dik silindirin iki ana doğrusundan geçen bir düzlemle kesiti bir dik dörtgendir.

6°. Dairesel bir silindirin taban merkezlerini birleştiren doğru parçası, ana doğrulara paralel ve eşittir. Bu doğru parçasına dairesel silindirin *ekseni* denir.

SİLİNDİRİN İÇ VE DIŞ PRİZMALARI

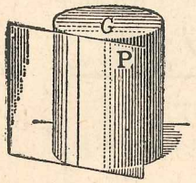
153. Silindirin teğet düzlemi. — Bir silindirin yalnız bir ana doğrusundan geçen düzleme, bu silindirin *teğet düzlemi* denir. Bu ana doğruya da *değme doğrusu* adı verilir (Şek. 150).

154. Silindirin iç prizması. — Bir prizmanın köşeleri, bir silindirin taban çemberleri üzerinde bulunursa, bu prizmaya silindirin *iç prizması* denir. Burada silindir, prizmanın *dış silindiri* olur.

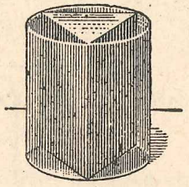
[*] Bu özellikler, daire tabanlı olmıyan silindirler için de doğrudur.

Bir düzgün prizmanın dış silindiri, bir dönel silindir olur.

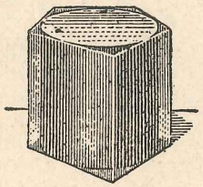
Şek. 151 de dönel silindirin içine çizilen düzgün üçgen prizma görülmektedir.



Şek. 150



Şek. 151



Şek. 152

155. Silindirin dış prizması. — Bir silindirin taban çemberleri, bir prizmanın taban kenarlarına içten teğet olursa, bu prizmaya silindirin *dış prizması* denir. Burada silindir, prizmanın *iç silindiri* olur.

Bir silindirin dış prizmasının yanal yüzleri bu silindire teğettir.

Bir düzgün prizmanın iç silindiri, bir dönel silindir olur.

Şek. 152 de bir dik silindirin dışına çizilen beşgen düzgün prizma görülmektedir.

Sorular:

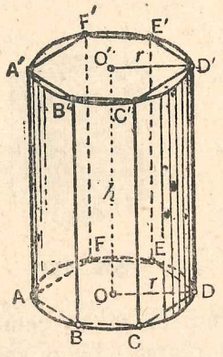
1. Dönel bir silindirin teğet düzlemine değme doğrusundan geçmek üzere çizilen dik düzlem, bu silindirin ekseninden geçer. Niçin?
2. Her prizmanın dış silindiri var mıdır?
3. Her prizmanın iç silindiri var mıdır?
4. Her düzgün prizmanın bir dış silindiri ve bir de iç silindiri vardır. Niçin?

DÖNEL SİLİNDİRİN ALANI

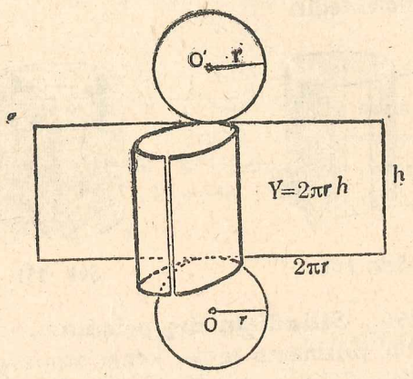
156. Dönel silindirin yanal alanı. — Eğri bir yüzeyi birim karelerle doğrudan doğruya ölçmek mümkün olmadığından, dönel silindirin yanal alanı için aşağıdaki tanımı vereceğiz:

Dönel silindirin içine (veya dışına) çizilmiş olan bir düzgün prizmanın yanal yüzlerinin sayısı sınırsız surette arttırıldığı zaman bu prizmanın yanal alanının erişeceği limite, dönel silindirin *yanal alanı* denir.

157. Teorem. — **Bir dönel silindirin yanal alanı, tabanının çevresi ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.**



Şek. 153



Şek. 154

İspatı: Tabanları (O, r), (O', r) daireleri ve yüksekliği h olan bir dönel silindirin içine bir düzgün prizma çizilmiş olsun (Şek. 153). Bu prizmanın yanal alanı, taban çevresiyle yüksekliğinin çarpımına eşittir (No. 116). Taban çokgeninin kenar sayısı sınırsız surette arttırılacak olursa, yükseklik değişmez, fakat yanal yüzlerin sayısı sınırsız surette artar. Tanım gereğince, limit halde taban çevresi (O) dairesinin çevresine ve prizmanın yanal yüzeyi de silindirin yanal yüzeyine erişir. Şu halde bu silindirin yanal alanı:

$$\boxed{Y = 2\pi r \cdot h}$$

olur.

158. Netice. — **Bir dönel silindirin bütün alanı:**

$$\boxed{S = 2\pi r\,(h + r)}$$

dir.

159. Dönel silindirin açılımı. — Bir dönel silindiri bir ana doğrusu boyunca keserek açacak olursak, bunun yanal yüzeyi bir dik dörtgen olur. Niçin? Bu yanal açılıma, tabanlara eşit iki daire eklemekle silindirin bütün açılımı elde edilir (Şek. 154).

SİLİNDİRİN HACMI

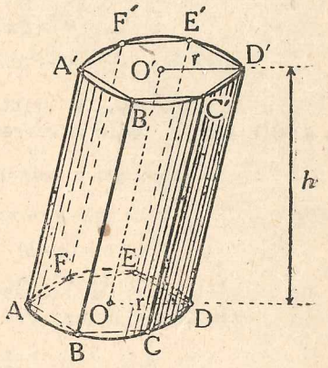
160. Tanım. — **Bir silindirin içine (veya dışına) çizilmiş olan düzgün tabanlı bir prizmanın taban çokgeninin kenar sayısı sınırsız surette arttırıldığı zaman bu prizma hacmının erişeceği limite, *silindirin hacmı* denir.**

161. Teorem. — **Bir silindirin hacmı, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.**

Gerçekten, ABCDEF düzgün çokgeninin kenar sayısı sınırsız surette arttırılırsa, limit halde bu çokgenin alanı (O, r) dairesinin alanına erişir. Şu halde bu silindirin hacmı:

$$\boxed{V = \pi r^2 \cdot h}$$

olur (Şek. 155).

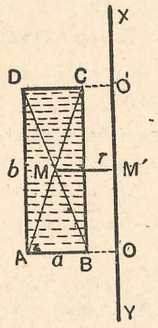


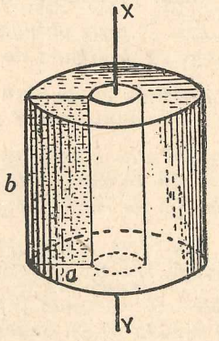
Şek. 155

Not: Silindirin taban çevresi $m = 2\pi r$ olduğundan, bu hacım formülünün çevre cinsinden ifadesi $V = \dfrac{m^2 h}{4\pi}$ olur.

Silindir şeklindeki direklerin çevreleri şerit metre ile ölçülür ve hacımları bu fomül yardımiyle kolayca bulunur.

162. Uygulama. — **Bir dik dörtgen, bir kenarına paralel olan ve kendisini kesmiyen bir eksen etrafında döndürülüyor; elde edilen silindir halkasının:**





Şek. 156

a) Bütün alanını hesaplayınız. Bu alan, dik dörtgen merkezinin çizdiği çemberin uzunluğu ile dik dörtgenin çevresinin çarpımına eşittir. Niçin?

b) Hacmını hesaplayınız. Bu hacım, dik dörtgen merkezinin çizdiği çemberin uzunluğu ile dik dörtgenin alanının çarpımına eşittir. Niçin?

Çözüm: a) $AB = a$, $AD = b$, $AO = x$, $BO = y$, $MM' = r$ olsun (Şek. 156).

$$x - y = a, \qquad x + y = 2r$$

olur. Meydana gelen halkanın bütün alanı:

$$S = 2\pi xb + 2\pi yb + 2(\pi x^2 - \pi y^2)$$

$$S = 2\pi (x + y)(b + x - y) = 4\pi r (b + a)$$

$$S = 2\pi r (2a + 2b)$$

olur. Burada $2\pi r$, M noktasının çizdiği çemberin uzunluğu, $(2a + 2b)$ ise ABCD dik dörtgeninin çevresidir.

b) Meydana gelen halkanın hacmı:

$$V = \pi x^2 \cdot b - \pi y^2 \cdot b = \pi b (x + y)(x - y) = \pi b \cdot 2r \cdot a$$

$$V = 2\pi r (a \cdot b)$$

olur. Burada $2\pi r$, M noktasının çizdiği çemberin uzunluğu, «$a \cdot b$» ise ABCD dik dörtgeninin alanıdır.

VIII. BÖLÜM ÜZERİNE:

PROBLEMLER

1. *Tabanının yarıçapı* 10 cm *ve yüksekliği* 40 cm *olan dik silindirin bütün alanını ve hacmını hesaplayınız.*

2. 6 m *uzunluğundaki galvaniz su borusunun dik kesitinin çevresi* 6,28 cm *ve bu dik kesit halkasının kalınlığı* 3 mm *dir. Bu borunun ağırlığını bulunuz* (Galvenizin yoğunluğu 7,7 ve $\pi = 3{,}14$ alınacaktır).

3. *Akım hızı* 5 cm/s *olduğuna göre, dış çapı* 50 m *ve kalınlığı* 2,5 m *olan bir borudan 25 dakikada ne kadar su akar?* (Cevap: 119221,875 cm^3).

4. *Ağız genişliği* 10 cm *olan bir borudan su* 6 m/s. *lik hızla akıyor. 950 litre suyun akma zamanı nedir?* (Cevap: $\leqq$ 20 saniye).

5. *Bir tulumbada piston çapı* 14 cm, *pistonun hareket yolu* 25 cm *dir. Gerçekte gönderilen su miktarı teorik olarak bulunanın* % 95 *i olduğuna göre tulumba her çekişte ne kadar su yollar?*

6. 1 kg. *bakırdan* 4 mm *çapında ne kadar bakır tel elde edilebilir?* (Bakırın yoğunluğu D = 8,8 alınacaktır.)

7. *İnce bir cam borunun çapını belirtmek için buna* 120 mg. *cıva dökülüyor. Böylece boruda* 80 cm *uzunlukta bir cıva ipliği meydana geliyor. Borunun çapı nedir?* (D = 13,6).

8. *Bütün alanı ve yüksekliği bilinen dik silindirin yanal alanını ve hacmını bulunuz:*

a) $S = 328$ cm^2, $h = 9$ cm; **b)** $S = 23{,}5$ cm^2, $h = 2{,}3$ cm.

9. *Dış çapı* 70 mm, *kalınlığı* 2,5 mm *ve uzunluğu* 145 cm *olan bir alüminyum borunun ağırlığı nedir?* (Alüminyumun yoğunluğu 2,56 dır.)

10. 10 km *uzunluk ve* 18 mm *kalınlığı olan bir kabloya* 1,5 mm *kalınlıkta kurşun kaplama yapılacaktır. Ne kadar kurşuna ihtiyaç vardır?*

11. *Genişliği* 1,32 m *ve yüksekliği* 0,50 m *olan bir dik dörtgen kıvrılarak silindir yapılıyor. Bu silindirin hacmı kaç litredir?* (Cevap: 69,4 lt.)

12. *Sıvıların hacmını ölçmek için yüksekliği taban çapının iki katı olan silindir şeklinde kaplar kullanılır. Çinkodan yapılan* 1 lt. *lik kabın kalınlığı* 0,5 mm *ve çinkonun yoğunluğu* 7,2 *olduğuna göre bu kabın:*

a) *İç boyutlarını;* **b)** *Ağırlığını bulunuz.*

13. *Eksenden geçen kesiti kare olan bir dik silidirin hacmı* 169,56 cm^3. *olduğuna göre bu dik silindirin taban yarıçapını ve yüksekliğini bulunuz* ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır).

14. *Bir dik dörtgen, bir defa büyük kenarı, bir defa da küçük kenarı etrafında döndürülüyor; elde edilen iki silindirin:*

a) *Yanal alanlarının,* **b)** *Hacımlarının oranını bulunuz.*

15. *Bir kübün dış silindiri iç silindirinin iki katına denk olur. Niçin?*

16. *Bir düzgün üçgen prizma ile bunun dış silindirinin* (Şek. 151):

a) *Yanal alanlarının,* **b)** *Hacımlarının oranını bulunuz*

17. *Bir altıgen düzgün prizmanın iç silindiri ile dış silindirinin hacımları oranını bulunuz.* (Cevap: $\frac{3}{4}$)

18. *Çevresi* 24 cm *olan bir dik dörtgenin bir kenarı etrafında döndürülmesinden meydana gelen silindirin yanal alanı* 75,36 cm^2 *dir. Bu dik dörtgenin boyutlarını bulunuz* ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır).

19. *Taban alanı* 78,5 cm^2 *olan bir dik silindirin içinde yüksekliği* 3 cm *olan su bulunmaktadır. Bu suya, boyutları* 2 cm, 3 cm, 4 cm *olan bir dik dörtgenler prizması:*

a) 3×4 cm^2 ; **b)** 2×3 cm^2

olan tabanı ile batırılırsa su ne kadar yükselir?

20. *Taban yarıçapı* 5 cm *olan bir eğik silindirin* 10 cm *uzunluğundaki ana doğrusu taban düzlemiyle* 30° *lik bir açı yapmaktadır. Bu silindirin hacmını bulunuz.* (Cevap: $V = 392{,}5$ cm^3.)

21. *Biri dik, biri eğik olan iki silindirin tabanları ve eksenleri eşittir. Eğik silindirin ekseni taban düzlemiyle kaç derecelik açı yapmalıdır ki bu iki silindirin hacımlarının oranı* $\frac{1}{2}$ *olsun?*

22. *Taban çapı* 56 cm, *yüksekliği* 87 cm *olan bir su bidonu, yatan bir silindir durumunda bulunuyor. Bu bidonun içinde* 14 cm *yüksekliği bulunan suyun hacmı ne kadardır?*

(Y. g.) Burada bir dönel silindirin taban yarıçapına ortasında dik olan bir düzlemle kesilmesinden elde edilen silindir parçasının hacmı hesaplanacaktır. Bunun için, bu cismin tabanı olan daire parçasının alanı bulunup silindir yüksekliği ile çarpılır.

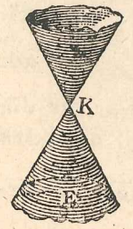
23. *Bir kazan, yatan bir silindir durumunda bulunuyor.* 1 m *uzunluk ve* 45 cm *yüksekliği vardır. Bu kazanın içinde* 30 cm *yükseklikte duran suyun hacmı ne kadardır?*

24. *Sabit bir L doğrusuna paralel ve r uzaklığında kalarak hareket eden bir D doğrusunun geometrik yeri nedir?*

BÖLÜM IX

KONİ

163. Konik yüzey. — Kapalı bir (E) eğrisi ile bunun düzlemi dışında bir K noktası verildiğinde, K dan geçen ve bu (E) eğrisine dayanarak hareket eden bir doğrunun meydana getirdiği yüzeye *konik yüzey* denir (Şek. 157).



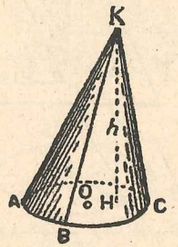
Şek. 157

K noktası, bu konik yüzeyin *tepesidir*. (E) eğrisine *doğrultman*, hareket eden doğruya da *ana doğru* adı verilir.

164. Koni. — Bir konik yüzeyin bir kanadı ile, bütün ana doğruları kesen bir düzlem tarafından sınırlanan cisme, *koni* denir (Şek. 158).

Bu konik yüzeyin tepesi koninin de *tepesi* olur.

ABC kesit eğrisiyle sınırlanan düzlem parçasına koninin *tabanı*, taban çevresini tepeye birleştiren eğri yüzeye koninin *yanal yüzeyi*, tepeyi taban çevresinin bir noktasına birleştiren doğru parçasına koninin *ana doğrusu*, tepenin tabana olan uzaklığına *yükseklik denir*.



Şek. 158

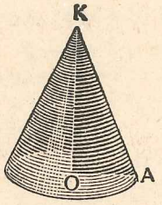
Not: Bir koninin ana doğrusunu a, yüksekliğini h, yanal alanını Y, bütün alanını S ile ve hacmını V ile göstereceğiz.

Koniler tabanlarına göre isim alırlar; *dairesel koni*, *eliptik koni*... gibi.

Bu kitapta sadece dairesel konilerden bahsedilecektir. Bir dairesel koninin tepesini taban merkezine birleştiren doğru parçasına bu koninin *ekseni* denir.

165. Dik koni. — Tabanı daire olan ve yüksekliği taban merkezinden geçen koniye *dik koni* denir (Şek. 159).

Dik olmıyan bütün konilere *eğik koni* veya sadece *koni* denir.



Şek 159

Bir dik koni, bir dik üçgenin bir dik kenarı etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir. Bunun için ekseriya dik koni yerine *dönel koni* denir.

KOA ($\widehat{O} = 90°$) dik üçgeni KO dik kenarı etrafında döndürülürse OA kenarı dönel koninin *tabanını*, AK kenarı da *yanal yüzeyini* meydana getirir. OK ye bu dönel koninin *ekseni* denir.

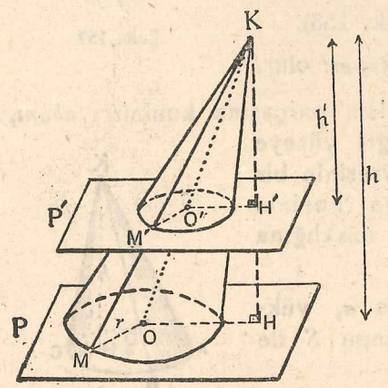
166. Koninin özellikleri :

1°. Bir dönel koninin ekseni, yüksekliğine eşittir.

2°. Bir dönel koninin ana doğruları birbirine eşittir.

3°. Bir dönel koninin iki ana doğrusundan geçen bir düzlemle kesiti, bir ikizkenar üçgendir.

167. Teorem. — Bir koni tabana paralel bir düzlemle kesilirse :



Şek. 160

1°. Kesit eğrisi bir çemberdir.

2°. Kesit dairesi ile taban dairesinin yarıçaplarının oranı, bunların tepeden olan uzaklıklarının oranına eşittir.

İspatı : Bu koninin taban merkezi O, yüksekliği KH ve taban çemberini çizen hareketli bir nokta M olsun (Şek. 160). KO, KH, KM doğruları, tabana paralel (P') düzlemini sıra ile O', H', M' noktalarında kestiğine göre :

$$O'H' \parallel OH, \qquad O'M' \parallel OM$$

olur (No 35). Buradan :

$$\frac{KH'}{KH} = \frac{KO'}{KO} = \frac{KM'}{KM} = \frac{O'M'}{OM} \qquad (1)$$

yazılır. $OM = r$ olduğundan «$O'M' = \frac{h'}{h} \cdot r$ = sabit» olur. Şu halde

M noktası (O) çemberini çizekken, M' noktası da O' merkezli O'M' yarıçaplı bir çember çizer.

(I) bağıntısı, teoremin ikinci kısmında da doğru olduğunu göstermektedir.

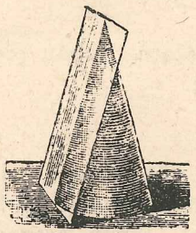
168. Neticeler :

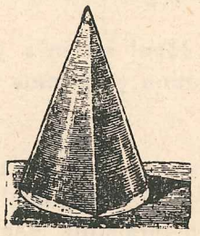
I. — Bir koninin ekseni, tabana paralel her kesidin merkezinden geçer.

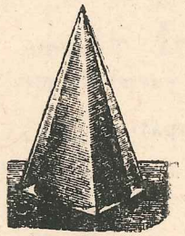
II. — Bir koni tabana paralel bir düzlemle kesilirse, kesit alanının taban alanına oranı, bunların tepeden olan uzaklıklarının karelerinin oranına eşittir.

KONİNİN İÇ VE DIŞ PİRAMİTLERİ

169. Koninin teğet düzlemi. — Bir koninin yalnız bir ana doğrusundan geçen düzleme, bu koninin *teğet düzlemi* denir. Bu ana doğruya da *değme doğrusu* adı verilir (Şek. 161).


Şek. 161


Şek. 162


Şek. 163

170. Koninin iç piramidi. — Bir koninin taban çemberinin içine çizilen çokgeni taban ve koninin tepesini de tepe olarak kabul eden piramide, bu koninin *iç piramidi* denir (Şek. 162). Burada koni, piramidin *dış konisi* olur.

Bir düzgün piramidin dış konisi bir dönel konidir.

171. Koninin dış piramidi. — Bir koninin taban çemberinin dışına çizilen teğetler çokgenini taban ve koninin tepesini de tepe olarak kabul eden piramide bu koninin *dış piramidi* denir (Şek. 163). Burada koni, piramidin *iç konisi* olur.

Bir koninin dış piramidinin yanal yüzleri bu koniye teğettir.

Bir düzgün piramidin iç konisi, bir dönel koni olur.

Sorular:

1. Dönel bir koninin teğet düzlemine değme doğrusundan geçmek üzere çizilen dik düzlem, bu koninin ekseninden geçer. Niçin?
2. Her piramidin dış konisi var mıdır?
3. Her piramidin iç konisi var mıdır?
4. Her düzgün piramidin bir iç ve bir dış konisi vardır. Niçin?

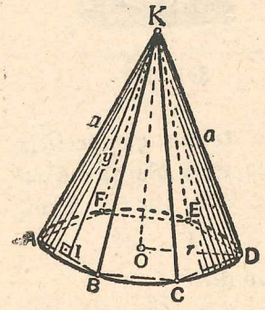
DÖNEL KONİNİN ALANI

172. Dönel koninin yanal alanı. — Bir dönel koninin içine (veya dışına) çizilmiş olan bir düzgün piramidin yanal yüzlerinin sayısı sınırsız surette arttırıldığı zaman bu piramidin yanal alanının erişeceği limite, dönel koninin *yanal alanı* denir [*].

173. Teorem. — Bir dönel koninin yanal alanı, taban çevresinin yarısı ile ana doğrusunun çarpımına eşittir.

İspatı:

Tabanı (O, r) dairesi ve tepesi K olan bir dönel koninin içine bir düzgün piramit çizilmiş olsun (Şek. 164). Bu piramidin yanal alanı, taban çevresiyle yanal yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir (No. 133). Taban çokgeninin kenar sayısı sınırsız surette arttırılacak olursa, yanal yüzlerin sayısı da sınırsız surette artar. Tanım gereğince, limit halde taban çevresi (O) dairesinin çevresine, KI yanal yüksekliği KA ana doğrusuna ve piramidin yanal yüzeyi de koninin yanal yüzeyine erişir. Şu halde bu koninin yanal alanı:



Şek. 164

$$Y = \pi r \cdot a$$

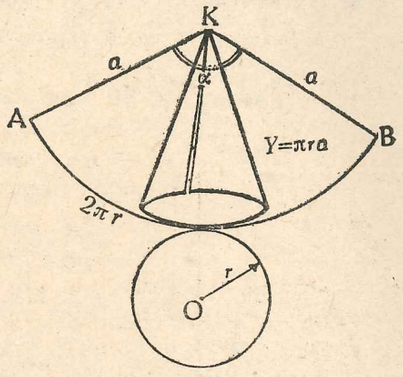
olur.

174. Netice. — **Bir dönel koninin bütün alanı:**

$$S = \pi r\,(a + r)$$

dir.

175. Dönen koninin açılımı. — Bir dönel keniyi bir ana doğrusu boyunca keserek açacak olursak, bunun yanal yüzeyi bir daire kesmesi olur. Niçin? bu yanal açılıma, tabana eşit bir daire eklemekle koninin bütün açılımı elde edilir (Şek. 165).



Şek. 165

Not: Merkez açısı α olan (AKB) daire kesmesinin alanı iki türlü yazılarak:

$$\frac{\pi a^2 \cdot \alpha}{360^\circ} = \pi r a$$

ve buradan

$$\alpha = \frac{r}{a} \cdot 360^\circ$$

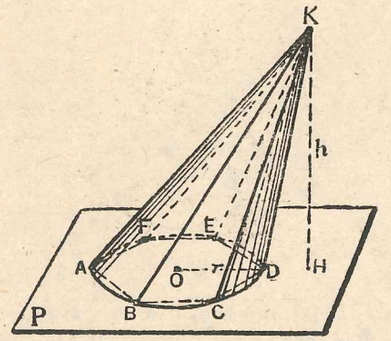
bulunur.

KONİNİN HACMI

176. Tanım. — Bir koninin içine (veya dışına) çizilmiş olan düzgün tabanlı bir piramidin taban çokgeninin kenar sayısı sınırsız surette arttırıldığı zaman, bu piramit hacmının erişeceği limite, *koninin hacmı* denir.

177. Teorem. — Bir koninin hacmı, taban alanı ile yüksekliği çarpımının üçte birine eşittir.

Gerçekten, ABCDEF düzgün çokgeninin kenar sayısı sınırsız surette arttırılırsa, limit halde bu çokgenin alanı (O, r) dairesinin alanına eşittir. Şu halde bu koninin hacmı:



Şek. 166

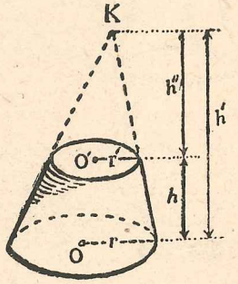
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

olur (Şek. 166).

Ödev. — Dik kenarları 3 cm, 4 cm olan bir dik üçgen 4 cm lik kenarı etrafında döndürülüyor; elde edilen dönel koninin:
a) Yanal alanını, b) Bütün alanını, c) Hacmını hesaplayınız.

KESİK KONİ [*]

178. Tanım. — Bir koniyi tabana paralel bir düzlemle kestiğimizde, taban ile düzlem arasında kalan kısma *kesik koni* denir.

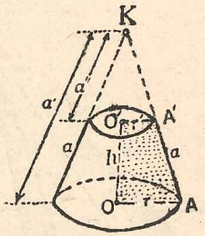


Şek. 167

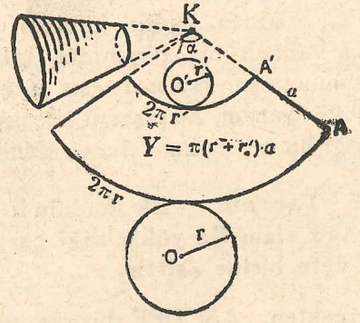
(O) dairesine *alt taban*, (O') dairesine *üst taban*, iki taban arasındaki uzaklığa *yükseklik* denir.

179. Dönel kesik koni. — Bir dönel koninin tabana paralel bir düzlemle kesilmesinden elde edilen kesik koniye *dönel kesik koni* denir.

Bir dönel kesik koni, OAA'O' gibi bir dik yamuğun OO' dik kenarı etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir (Şek. 168). Burada OO', bu kesik koninin *ekseni* olur. Yamuğun OA, O'A' kenarları bu kesik koninin tabanlarını, AA' kenarı da yanal yüzeyini meydana getirir. AA' ye dönel kesik koninin *ana doğrusu* denir.



Şek. 168



Şek. 169

[*] Bu konu, yeni proğrama konmamıştır. Fakat öğrenilmesi kolay olduğundan, pratikteki önemini göz önüne alarak, buraya bir tatbikat olarak koydum.

180. Teorem. — **Bir dönel kesik koninin yanal alanı, tabanlarının çevreleri toplamının yarısı ile ana doğrusunun çarpımına eşittir.**

(Y. g) Bu dönel kesik koni, iki koninin farkı olarak düşünülürse

$$Y = \pi r \cdot a' - \pi r' \cdot a''$$ yazılır (Şek. 168).

$$\frac{a'}{a''} = \frac{r}{r'} \quad \text{ve} \quad a' - a'' = a$$

dan faydalanarak:

$$Y = \pi (r + r') a$$

olduğunu bulunuz.

181. Netice. — **Bir dönel kesik koninin bütün alanı:**

$$S = \pi a (r + r') + \pi (r^2 + r'^2)$$ olur.

182. Dönel kesik koninin açılımı. — Bir dönel kesik koninin yanal açılımını yapmak için, ana doğruları KA ve KA' olan iki koninin açılımlarının farkı alınır (Şek. 169). Bu yanal açılıma tabanlara eşit iki daire eklemekle bütün açılım elde edilir.

183. Teorem. — **Taban yarıçapları r, r' ve yüksekliği h olan bir kesik koninin hacmı:**

$$V = \frac{1}{3}\pi h (r^2 + r'^2 + r \cdot r') \qquad (1)$$

dür.

1. Yol: Bu kesik koni, iki koninin farkı olarak düşünülürse:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h' - \frac{1}{3}\pi r'^2 \cdot h''.$$

yazılır (Şek. 167). Bundan sonra

$$\frac{h'}{h''} = \frac{r}{r'} \quad \text{ve} \quad h' - h'' = h$$

den faydalanarak (1) formülünü bulunuz.

2. Yol: Bu kesik koni, tabanları düzgün çokgen olan bir kesik piramidin limit konumu olarak düşünülür ve «No. 147» de

$$G = \pi r^2 \qquad G' = \pi r'^2$$

konursa (1) formülü bulunur.

Ödev. — Yüksekliği 2 cm ve tabanları 3 cm, 1 cm olan bir dik yamuk, yüksekliği etrafında döndürülüyor; elde edilen dönel kesik koninin:
a) Yanal ve bütün alanını; b) Hacmını hesaplayınız.

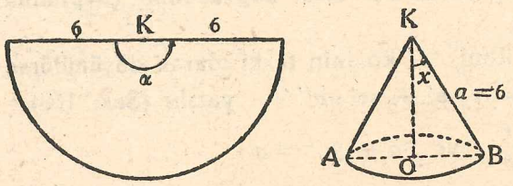
184. Uygulamalar:

1. Yarıçapı 6 cm olan bir yarım daire kıvrılarak bir dönel koni yapılıyor. (Şek. 170). Bu koninin:

a) Taban yarıçapını ve yüksekliğini;

b) Yarım tepe açısını;

c) Bütün alanını ve hacmını bulunuz.



Şek. 170

Çözüm: a) Yanal yüzeyin açılımı olan daire kesmesinin merkez açısı $\alpha = \frac{r}{a}\,360°$ dir. Burada $a = 180°$, $a = 6$ cm konularak $r = 3$ cm bulunur.

Demek ki bu koninin eksenden geçen kesiti bir eşkenar üçgen oluyor. Böyle bir koniye *eşkenar koni* denir.

$h^2 = a^2 - r^2$ den $h = 3\sqrt{3}$ cm elde edilir.

b) Bir dönel koninin ana doğrusu ile yüksekliği arasındaki açıya bu koninin *yarım tepe açısı* denir. Burada $\widehat{x} = 30°$ dir.

c) $Y = 18\pi$ cm², $G = 9\pi$ cm² olup $S = 27\pi$ cm² ve nihayet

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . h \quad \text{den} \quad V = 9\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^3 \quad \text{bulunur.}$$

2. Bir kenarı a olan ABC eşkenar üçgeni A açısının dış açıortayı etrafında döndürülüyor (Şek. 171). Elde edilen cismin:

a) Bütün alanını bulunuz. Bu alan, üçgen merkezinin çizdiği çemberin uzunluğu ile üçgenin çevresinin çarpımına eşittir. Niçin?

b) Hacmını bulunuz. Bu hacım, üçgen merkezinin çizdiği çemberin uzunluğu ile üçgenin alanının çarpımına eşittir. Niçin?

Çözüm: a) $BB' = CC' = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ dür.

$$S = 2\pi\, BB' . BC + 2 . \pi\, BB' . AB$$

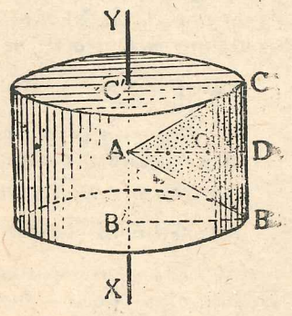
$$S = 2\pi\sqrt{3}\,a^2 = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot 3a$$

olur. Burada $2\pi\frac{a\sqrt{3}}{3}$, O noktasının çizdiği çemberin uzunluğu, $3a$ ise ABC eşkenar üçgeninin çevresidir.

b) $V = \pi\,\overline{BB'}^2 \cdot BC - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi\,\overline{BB'}^2 \cdot AB'$

$$V = \frac{\pi a^3}{2} = \left(2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

olur. Burada $2\pi\frac{a\sqrt{3}}{3}$, O noktasının çizdiği çemberin uzunluğu, $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ise ABC eşkenar üçgeninin alanıdır.



Şek. 171

3. Alt çapı 35 cm, üst çapı 15 cm, ana doğrusu 12 cm olan kesik dönel koni biçimindeki bir abajurun kâğıttan bir örneğini yapmak istiyoruz. Kâğıt üzerine çizilecek yayların yarıçapları ile kesmenin merkez açısını hesaplayınız.

Çözüm: Çizilmesi istenilen kesme yayları, abajurun taban çevrelerine eşit olur. Bu yayların yarıçapları x, $x + 12$ ile gösterilerek:

$$\frac{x}{x+12} = \frac{15}{35}$$

yazılır. Buradan $x = 9$ cm bulunur. Şu halde:

Küçük yayın yarıçapı = 9 cm,
Büyük yayın yarıçapı = 21 cm dir.
Kesmenin merkez açısı:

$$\alpha = \frac{r}{a} \cdot 360° = \frac{7{,}5}{9} \cdot 360° = 300°$$

olur.

IX. BÖLÜM ÜZERİNE

PROBLEMLER

1. *Yarıçapı* 15 cm, *yüksekliği* $3\sqrt{11}$ cm *olan bir dönel koninin:*

a) *Hacmını;* b) *Yanal alanını;* c) *Yanal açılımının merkez açısını bulunuz.* (**Cevap:** $\sqrt{11} = 3{,}32$ olup $V = 2345{,}58$ cm³; $Y = 533{,}8$ cm²; $\alpha = 300°$ **olur.**)

2. *Merkez açısı* 120° *ve alanı* 462 cm² *olan bir daire kesmesi kıvrılarak koni yapılıyor. Elde edilen koninin hacmını hesaplayınız.* ($\pi = 22/7$ alınacaktır.)

Cevap: $V = 1013{,}32$ cm³ ($\sqrt{2} = 1{,}41$ alındı.)

3. *Merkez açısı* 288° *olan bir daire kesmesi kıvrılarak koni yapılıyor. Bu koninin hacmı* 539 cm³ *olduğuna göre,* $\pi = 22/7$ *iken:*

a) *Taban yarıçapı,* b) *ana doğrusu,* c) *yüksekliği ne kadardır?*

Cevap: $r = 7\sqrt[3]{2}$; $a = \frac{35}{4}\sqrt[3]{2}$; $h = \frac{21}{4}\sqrt[3]{2}$.

4. *Bir dönel koninin yanal alanı taban alanından büyük olur. Niçin? Yanal alan taban alanının k katı olursa, bu yanal yüzün açılımı olan daire kesmesinin merkez açısı ne kadar olur?* (Uygulama $k = 5$)

Cevap: $\alpha = \frac{360°}{k}$ olup $k = 5$ için $\alpha = 72°$ olur.

5. *Eksenden geçen kesiti eşkenar üçgen olan bir dönel koninin bu kesitinin alanı* 43,25 cm² *olduğuna göre bu koninin:*

a) *Hacmını ve yanal alanını bulunuz.* ($\sqrt{3} = 1{,}73$ alınacaktır.)

b) *Açılımını çiziniz.* (**Cevap:** $V \cong 226{,}342$ cm³; $Y = 157$ cm²; $\alpha = 180°$.)

6. *Eksenden geçen kesiti ikizkenar dik üçgen olan bir dönel koninin bu kesitinin alanı* 4 cm² *olduğuna göre, bu koninin bütün alanını ve hacmını bulunuz.* (**Cevap:** $S = 4(\sqrt{2}+1)\pi$ cm²; $V = \frac{8\pi}{3}$ cm³)

7. *Taban çapı* 4 cm. *olan bir eğik koninin en büyük ve en küçük ana doğrularının tabana göre eğim açıları,* 30° *ve* 60° *dir. Bu eğik koninin hacmını hesaplayınız.* (**Cevap:** $V = \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{3}$ cm³)

8. *Bir kesik dönel koninin yanal yüzünün açılımı, merkez açıları* 288° *ve yarıçapları* 37 cm, 1 cm *olan iki daire kesmesinin farkından ibarettir. Bu kesik koninin:*

a) *Yüksekliğini,* b) *Hacmını bulunuz* (**Cevap:** 21,6 cm; 20358 cm³)

9. *Kalınlığı* 1 cm *ve alanı* 5,5 cm² *olan dörtte bir daire halkası bükülerek kesik koni yapılıyor. Bu kesik koninin hacmını bulunuz.* ($\pi = \frac{22}{7}$ alınacaktır). (**Cevap:** $\frac{407\sqrt{15}}{672}$ cm³).

10. *Bir kesik dönel koninin yanal alanı* $\frac{2200}{7}$ cm² *ve ana doğrusu* 5 cm *dir. Taban yarıçaplarının farkı* 3 cm *olduğuna göre yüksekliğini ve hacmını bulunuz.* (**Cevap:** $k = 4$ cm; $V = 1266{,}57$ cm³).

11. 5 m *uzunlukta bir ağaç kütüğünün iki başında çevreleri* 376,3 cm *ile* 282,6 cm *dir. Bu kütüğün ağırlığı nedir?* (D = 1,2). (**Cevap:** 4286,1 kg.)

12. *Alt ve üst taban çevreleri* 50 cm *ve* 30 cm *olan bir dönel kesik koninin hacmı* 343 cm³ *dür Bu kesik koninin ana doğrusunun büyük tabana göre eğimi nedir?* ($\pi = 22/7$). (**Cevap:** Eğim = 0,815).

13. *Çelikten bir kesik dik koni eksene paralel olarak silindir şeklinde delinmiştir.* $r = 12$ cm, $r' = 7$ cm, $h = 10$ cm *ve silindirin çapı* 4 cm *olduğuna göre ağırlığını hesaplayınız.* (D = 7,7 alınacaktır). (**Cevap:** 21368 g.)

14. *Dik kenarları* 30 cm, 40 cm *olan bir dik üçgenin hipotenüs etrafında dönmesinden elde edilen cismin alanını ve hacmını bulunuz.*

(**Cevap:** $S = 5275{,}2$ cm²; $V = 30144$ cm³)

15. *Bir* ABC ($\widehat{A} = 90°$) *dik üçgeninin* a, b, c *kenarları etrafında döndürülmesinden elde edilen cisimlerin hacımları sıra ile* V_a, V_b, V_c *olduğuna göre:*

$$\frac{1}{V_a^2} = \frac{1}{V_b^2} + \frac{1}{V_c^2} \qquad (1)$$

olduğunu gösteriniz.

Yol gösterme: Yüksekliği h olan bu dik üçgende

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad a^2 \cdot h^2 = b^2 \cdot c^2$$

bağlılıkları vardır. Bunlar taraf tarafa bölünür ve eşitliğin iki tarafı $\frac{9}{\pi^2}$ ile çarpılırsa (1) bağıntısı elde edilir.

16. *Bir* ABC *üçgeninin* a, b, c *kenarları etrafında döndürülmesinden elde edilen cisimlerin hacımları sırayla* V_a, V_b, V_c *ile gösteriliyor.*

a) *Bu hacımları üçgenin* S *alanına bağlı olarak hesaplayınız.*

b) *Üçgenin kenarları arasında ne bağlılık olmalı ki:*

$$V_a = V_b + V_c \qquad \textit{olsun.}$$

(Y. g.) Bir üçgende $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S$ olduğunu göz önüne alınız.

17. *Kenarları* $a < b < c$ *olan bir* ABC *üçgeni hangi kenar etrafında döndürülürse en büyük hacım elde edilir?*

Yol gösterme: Bu üçgende $h_a > h_b > h_c$ olacağıdı göz önüne alınız.

18. *Bir* ABC *üçgeninde kenarları arasında* $2a = b + c$ *bağıntısı varsa, bu üçgenin kenarları etrafında döndürülmesinden elde edilen cisimlerin hacımları arasında:*

$$\frac{2}{V_a} = \frac{1}{V_b} + \frac{1}{V_c}$$

bağıntısı vardır. Niçin?

Yol gösterme: Bu üçgenin yükseklikleri arasında:

$$\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

bağıntısının bulunacağını görünüz. Sonra bu bağıntının iki tarafını $\frac{3}{\pi}$ ile çarpıp, (2 S) ile bölünüz (S, üçgenin alanıdır).

19. *Kenarları* a, b *olan bir paralelkenar, kenarları etrafında döndürülüyor. Elde edilen hacımlar, kenarlarla ters orantılı olurlar. Niçin?*

20. *Bir kenarı a olan bir* ABCD *yarım düzgün altıgeni,* AD *köşegeni etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin bütün alanını ve hacmını hesaplayınız.* (Cevap: $S = 2\sqrt{3}\,\pi a^2$; $V = \pi a^3$.)

21. *Bir kenarı a olan bir düzgün altıgenin r iç yarıçapını ve s alanını bulunuz.*

Bu altıgen, kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Elde edilen cismin alanı S, hacmı V ile gösterilirse:

$$S = 2\pi r \cdot 6a \quad , \quad V = 2\pi r \cdot s$$

olur. Niçin?

22. *Bir koni ana doğrularının orta noktalarından geçen bir düzlemle kesiliyor; elde edilen kesik koni, küçük koninin 7 katına denk olur. Niçin?*

23. *Bir koni tabanâ paralel bir düzlemle kesiliyor; elde edilen kesik koni, küçük koninin 26 katına denk olduğuna göre bu düzlem verilen koninin yüksekliğini hangi oranda böler?* (Cevap: $\frac{1}{2}$).

24. *Bir kare piramidin dış konisi, iç konisinin iki katına denk olur. Niçin?*

25. *Bir ayrıtı a olan düzgün dörtyüzlünün:* a) *dış konisinin,* b) *iç konisinin hacımlarını bulunuz. Bu hacımlar ne orandadır?* (Cevap: $\frac{1}{4}$)

26. *Eşkenar üçgen tabanlı her piramidin dış konisi, iç konisinin 4 katına denk olur. Niçin?*

27. *Sabit bir* K *noktasından geçen ve sabit bir* Δ *doğrusu ile bilinen bir* α *açısı yapan doğruların geometrik yeri nedir?*

Yol gösterme: K dan Δ doğrusuna paralel çizerek düşününüz.

28. *Bir* K *noktasından geçen ve bir* (P) *düzlemiyle bilinen bir* α *açısı yapan doğruların geometrik yeri nedir?*

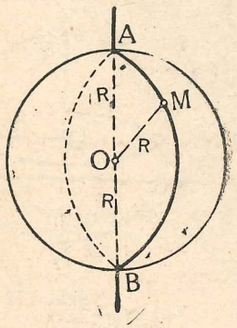
BÖLÜM X

KÜRE

185. Tanımlar. — Uzayda sabit bir O noktasından bilinen bir R uzaklığında bulunan noktaların geometrik yerine *küre yüzeyi* ve bu yüzeyle sınırlanan cisme *küre* denir.

Bu O noktasına *merkez*, R uzaklığına da *yarıçap* adı verilir.

Merkez ve yarıçapı belli olan küre tamamen bellidir. Merkezi O ve yarıçap R olan bir küre kısaca (O, R) şeklinde yazılarak gösterilir.



Şek. 172

Kürenin O merkezinden geçen bir doğru, bu küreyi OA = OB = R olmak üzere A ve B gibi iki noktada keser. AB = 2 R uzunluğuna kürenin *çapı* denir (Şek. 172).

Küre, bir yarım daireyi kendi çapı etrafında döndürmekle elde edilebilir. Meselâ AMB yarım dairesi AB çapı etrafında döndürülürse AB çaplı bir küre meydana gelir (Şek. 172). Bu dönmede, yarım dairenin çevresi, kürenin yüzeyini meydana getirir.

Bu küre yüzeyi, uzayı iki bölgeye ayırır. Merkezin bulunduğu bölgeye *iç*, diğerine *dış bölge* denir.

Bir M noktası, bir (O, R) küresinin merkezinden OM = d uzaklığında olduğuna göre:

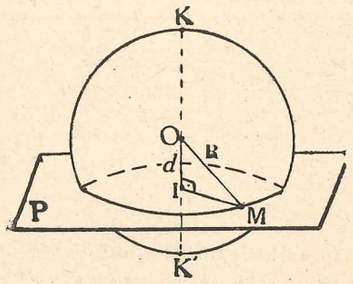
1°. $d < R$ ise M noktası kürenin içinde;

2°. $d = R$ ise M noktası kürenin yüzeyinde;

3°. $d > R$ ise M noktası kürenin dışında bulunur.

186. Teorem. — **Bir küre yüzeyinin her hangi bir düzlemle kesiti bir çemberdir.**

İspatı: Küre merkezinin (P) düzlemine olan uzaklığı OI = d ve



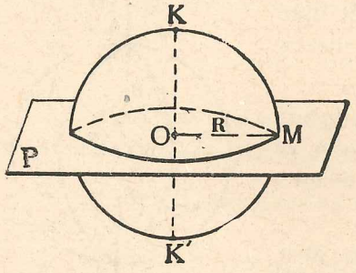
Şek. 173

kesit eğrisi üzerindeki her hangi bir nokta M olsun (Şek. 173).

$\overline{IM}^2 = R^2 - d^2$ veya $IM = \sqrt{R^2 - d^2}$ = sabit

olduğundan M nin geometrik yeri, I merkezli ve $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ yarıçaplı bir çemberdir.

Böyle bir çembere *küre çemberi* adı verilir. OI doğrusuna bu çemberin *ekseni*, bu eksenin küre yüzeyini kestiği K ve K′ noktalarına da bu çemberin *kutupları denir.*



Şek. 174

Not: (P) düzlemi kürenin merkezinden geçerse $d = 0$ olacağından kesitin yarıçapı, kürenin yarıçapına eşit olur.

Bu takdirde elde edilen kesite, kürenin *büyük çemberi* denir. Burada (P) düzlemi küreyi eşit iki parçaya ayırır (Şek. 174).

134. Bir kürenin bir düzleme göre durumları. — Bir (O, R) küresi ile bunun merkezinden d uzaklığında bulunan bir (P) düzlemi verilmiş olsun; üç hal düşünülebilir:

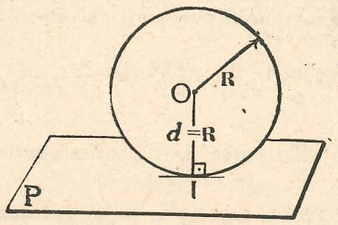
1. hal: $d < R$ ise düzlem küreyi *keser;* arakesit bir dairedir (Şek. 173),

2. hal: $d = R$ ise düzlem küreye *teğettir.* Yani düzlem ile küre yüzeyinin bir ortak noktası vardır. Bu noktaya *değme noktası* adı verilir (Şek. 175).

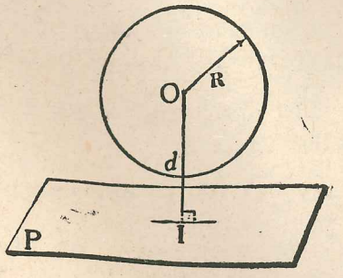
Demekki bir kürenin yarıçapına ucundan çizilen dik düzlem bu küreye teğettir.

3. hal: $d > R$ ise düzlem küreyi kesmez. Bu halde düzlem, kürenin *dışındadır* (Şek. 176).

Soru: Teğet düzleme değme noktasından çizilen dik doğru kürenin merkezinden geçer. Niçin?

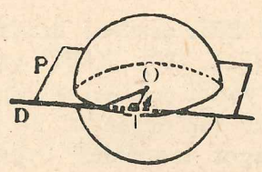


Şek. 175

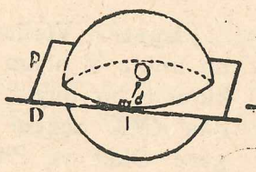


Şek. 176

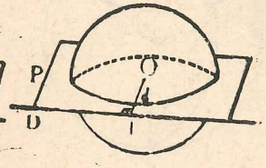
188. Bir doğrunun bir küreye göre durumları. — Bir (O, R) küresiyle bunun merkezinden d uzakığında bulunan bir D doğrusu verilmiş olsun; D doğrusu ile O merkezinin belirttiği düzlem, bu küre yüzeyini bir büyük çember boyunca keser. D doğrusunun bu çembere göre durumu incelenirse, küreye göre olan durumu anlaşılmış olur. Şu halde üç hal düşünülebilir:



$d < R$
Şek. 177



$d = R$
Şek. 178



$d > R$
Şek. 179

1°. $d < R$ ise D doğrusu küre yüzeyini iki noktada keser (Şek, 177).

2°. $d = R$ ise D doğrusu küreye *teğettir.* Yani bu küre yüzeyi ile D doğrusunun ancak bir ortak noktası vardır. Bu noktaya *değme noktası* denir (Şek. 178).

Demek ki kürenin bir yarıçapına ucundan çizilen her hangi bir dik doğru, bu küreye teğettir.

3°. $d > R$ ise D doğrusu kürenin *dışındadır* (Şek. 179).

Sörular:

1. Teğet doğruya değme noktasından çizilen dik düzlem, kürenin merkezinden geçer Niçin?

2. Bir küreye dışındaki bir K noktasından nasıl teğet çizilir? Bu teğet doğruların değme noktaları ile K noktası arasındaki parçaları eşit olur. Niçin?

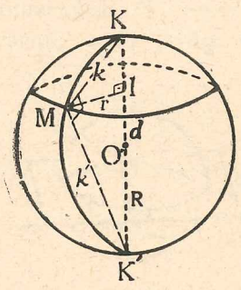
189. Teorem. — Bir küre yüzeyinin üç noktasından bir küre çemberi geçer.

(Y. g.) Bu üç noktanın belirttiği düzlemle kesiti düşününüz.

190. Teorem. — Bir küre yüzeyinin çap uçlarında bulunmıyan iki noktasından bu kürenin büyük çemberlerinden ancak bir tane geçer.

İspatı: Bu iki nokta ile merkezin belirttiği düzlem, bu küre yüzeyini ancak bir büyük çember boyunca keser.

191. Netice. — Bir kürenin iki büyük çemberi, kürenin bir çapı boyunca kesişir.



Şek. 180

192. Teorem. — Bir küre çemberinin her noktası bir kutuptan eşit uzaklıktadır.

İspatı: Verilen küre çemberi üzerinde bir nokta M olsun (Şek. 180). KMK′ yayı kürenin bir büyük yarım çemberi olduğundan KMK′ üçgeni bir dik üçgendir. Bu üçgene Öklit ve Pitagor teoremleri uygulanırsa:

1°. $\overline{MK}^2 = KK' \cdot KI$ yahut $k^2 = 2R(R - d)$

2°. $\overline{MK'}^2 = KK' \cdot K'I$ yahut $k'^2 = 2R(R + d)$

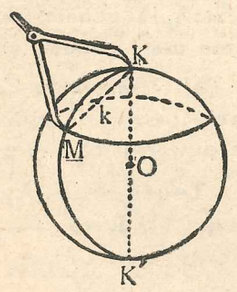
3°. $\overline{MK}^2 + \overline{MK'}^2 = \overline{KK'}^2$ yahut $k^2 + k'^2 = 4R^2$

bulunur. Burada $MK = k$ $MK' = k'$ uzunluklarına bu çemberin *kutupsal yarıçapları* denir.

Not. — Küre üzerinde verilen bir K noktasını kutup olarak kabul eden bir küre çemberi, «Şek. 181» deki gibi bir küre pergeli ile çizilir.

Küre üzerinde alınan her hangi bir nokta arasındaki uzaklık da bu pergel yardımiyle ölçülür.

193. İki kürenin birbirine göre durumları. — Yarıçapları R, R′ ve merkezler uzaklığı $OO' = d$ olmak üzere verilen iki küre, merkezler doğrusundan geçen bir düzlemle kesilirse bu kürelerin birer büyük dairesi elde edilir. Karşıt olarak, bu daireler OO′ merkezler doğrusu etrafında döndürülürse verilen küreler meydana gelir. Demek ki bu iki dairenin durumlarını incelemekle, bu iki kürenin durumları anlaşılmış olur. Şu halde:



Şek. 181

1°. $d > R + R'$ ise küreler kesişmez.

2°. $d = R + R'$ ise küreler *dıştan teğettir.*

3°. $R - R' < d < R + R'$ ise küreler *kesişir;* arakesitleri bir dairedir.

4°. $d = R - R'$ ise küreler *içten teğettir.*

5°. $d < R - R'$ ise kürelerden biri diğerinin içindedir.

BİR KÜRENİN BELİRTİLMESİ

194. Bir küre, merkezinin yeri ve yarıçapı bilindiği zaman belli olur. Bunun için küre yüzeyine ait en az kaç noktayı bilmemiz gerektiğini arıyalım:

1°. *Bir noktadan geçen küreler.* — Verilen bir A noktasından geçen sonsuz küre vardır. Niçin?

Eğer verilen A noktasından geçecek olan küreler aynı R yarıçapına malik olurlarsa, merkezlerinin geometrik yeri, A merkezli R yarıçaplı bir küre yüzeyi olur.

2°. *İki noktadan geçen küreler.* — A ve B gibi verilen iki noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktalar, AB doğru parçasının orta dikme düzlemi üzerinde bulunurlar (No. 61 — 1). Şu halde:

Verilen iki noktadan geçen sonsuz küre vardır; bunların merkezlerinin geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının orta dikme düzlemidir.

3° *Üç noktadan geçen küreler.* — A, B, C gibi verilen üç noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktalar, nerede bulunurlar? (No. 61 — 2 ye bak.) Şu halde:

Verilen üç noktadan geçen sonsuz küre vardır; bunların merkezlerinin geometrik yeri, bu üç noktadan geçen çemberin düzlemine merkezinden çıkılan dik doğrudur.

4°. *Dört noktadan geçen küre.* — Aynı düzlem içinde bulunmıyan A, B, C, D gibi dört noktadan eşit uzaklıkta bulunan üç nokta vardır. (No. 61 — 4 e bak.) Şu halde:

Teorem. — Aynı düzlem içinde bulunmıyan dört noktadan ancak bir küre yüzeyi geçer.

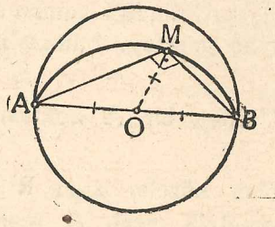
195. Neticeler:

I — Bir çember ile bu çemberin düzlemi dışındaki bir nokta bir küre yüzeyi belirtir.

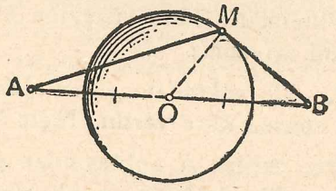
II — Aynı düzlemde bulunmıyan, fakat ortak iki noktası olan iki çember bir küre yüzeyi belirtir.

196. Teorem. — Verilen bir AB doğru parçasını dik açı ile gören uzay noktalarının geometrik yeri, AB çaplı bir küre yüzeyidir.

Y. g.) AMB ($\widehat{M} = 90°$) dik üçgeninde $MO = \frac{AB}{2}$ olacağını görünüz (Şek. 182).



Şek. 182



Şek. 183

197. Teorem. — **Verilen A ve B gibi iki noktaya uzaklıklarının kareleri toplamı sabit olan uzay noktalarının geometrik yeri, bu iki noktayı birleştiren doğru parçasının ortasını merkez alan bir küre yüzeyidir.**

(Y. g.) AMB üçgeninde

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 2\,\overline{MO}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}$$

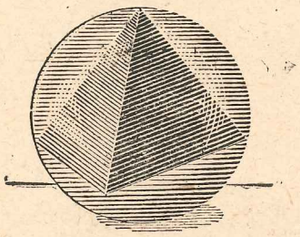
olduğunu düşünerek OM nin sabit uznnlukta olacağını gürünüz (Şek. 183).

ÇOKYÜZLÜ CİSİMLERİN DIŞ VE İÇ KÜRELERİ

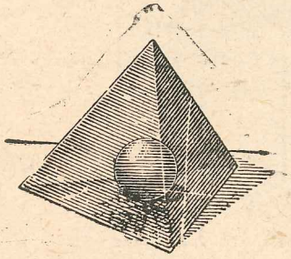
198. Bir çokyüzlünün dış küresi. — Çokyüzlü bir cismin bütün köşeleri bir küre yüzeyi üzerinde bulunursa, bu küreye, çokyüzlünün *dış küresi* denir.

Burada çokyüzlüye, *kürenin içine çizilen çokyüzlü* adı verilir.

Şek. 184 de bir dörtyüzlünün dış küresi görülmektedir.



Şek. 184



Şek. 185

199. Bir çokyüzlünün iç küresi. — Çokyüzlü bir cismin bütün yüzleri bir küreye teğet olursa, küreye, bu çok yüzlünün *iç küresi* denir.

Burada çokyüzlüye, *kürenin dışına çizilen çokyüzlü* adı verilir.

Şek. 185 de bir dörtyüzlüünün iç küresi görülmektedir.

Sorular:

1. Hangi prizmaların iç yahut dış küresi vardır?
2. Hangi pramitlerin iç yahut dış küresi vardır?
3. Her koninin bir dış küresi vardır. Niçin?

KÜRENİN ALANI

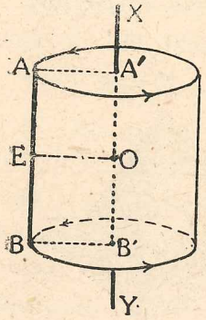
200 Yardımcı teorem. — **Bir doğru parçasının kendi düzlemi içinde bulunan bir eksen etrafında dönmesinden meydana gelen yüzeyin alanı, bu doğru parçasına orta noktasında teğet olan ve merkezi bu eksen üzerinde bulunan çemberin uzunluğu ile doğru parçasının eksen üzerindeki izdüşümünün çarpımına eşittir.**

İspatı:

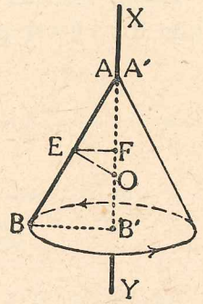
1. hal: *Verilen doğru parçası eksene paraleldir.* — Bu takdirde bir dönel silindir yüzeyi meydana geleceğinden:

$$Y = 2\pi\, OE \cdot A'B'$$

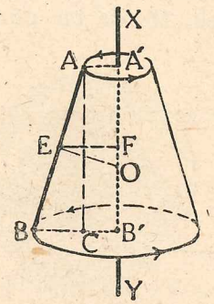
olur (Şek. 186).



Şek. 186



Şek. 187



Şek. 188

2. hal. *Verilen doğru parçasının bir ucu eksen üzerindedir.* — Bu takdirde bir dönel koni yüzeyi meydana geleceğinden:

$$Y = \pi\, BB' \cdot A'B'$$

olur (Şek. 187). Halbuki ABB', OEF dik üçgenlerinin benzerliğinden:

$$\frac{AB}{OE} = \frac{AB'}{EF} \quad \text{ve} \quad EF \cdot AB = OE \cdot AB'$$

yazılır. $EF = \frac{BB'}{2}$ ve $AB' = A'B'$ olduğundan

$$BB' \cdot AB = 2\, OE \cdot A'B' \quad \text{ve nihayet:}$$

$$Y = 2\pi\, OE \cdot A'B'$$

bulunur.

3. hal: *Verilen doğru parçası eksenin bir tarafındadır.* — Bu takdirde bir kesik dönel koni yüzeyi meydana geleceğinden:

$$Y = \pi\,(AA' + BB') \cdot AB = 2\pi\, EF \cdot AB$$

olur (Şek. 188). ABC, OEF dik üçgenlerinin benzerliğinden:

$$\frac{AB}{OE} = \frac{AC}{EF} \quad \text{veya} \quad AB \cdot EF = OE \cdot AC$$

yazılır. $AC = A'B'$ olduğundan:

$$Y = 2\pi\, OE \cdot A'B'$$

bulunur.

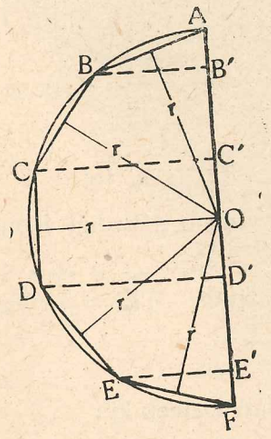
201. Teorem. — Yarıçapı R olan bir kürenin alanı:

$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

dir.

İspatı: AF = 2R çaplı bir yarım çember, AF çapı etrafında döndürülürse R yarı çaplı bir küre yüzeyi elde edilir.

Bu yarım çemberin içine çizilen herhangi bir yarım düzgün çokgen ABCDEF olsun (Şek. 189). Bu düzgün çokgenin iç çemberinin yarıçapını *r* ile gösterelim. ABCDEF çevresinin AF etrafında dönmesinden meydana gelen *Y* alanı; AB, BC, CD, DE, EF nin dönmesinden elde edilen alanların toplamına eşit olacağından:



Şek. 189

$$Y = 2\pi r \cdot AB' + 2\pi r \cdot B'C' + 2\pi r \cdot C'D' + 2\pi r \cdot D'E' + 2\pi r \cdot E'F$$

$$Y = 2\pi r\,(AB' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F)$$

$$Y = 2\pi r \cdot AF = 2\pi r \cdot 2R$$

bulunur.

Burada yarım çokgenin kenarlarının sayısı sınırsız surette arttırılırsa limit halde: ABCDEF çevresi AF çaplı yarım dairenin çevresine, *r* iç yarıçapı R ye ve *Y* alanı da kürenin *S* alanına erişir. Şu halde:

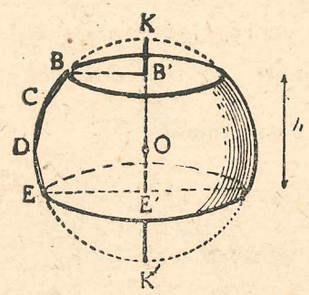
$$S = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2 \quad \text{olur.}$$

Not: Bu alan formülü kürenin $d\,(= 2R)$ çapı cinsinden yazılırsa $S = \pi d^2$ şeklini alır.

202. Neticeler: **I** — **Bir kürenin alanı, bir büyük dairesinin alanının 4 katına eşittir.**

II. — **İki kürenin alanlarının oranı, yarıçaplarının karelerinin oranına eşittir.**

203. Küre kuşağı. — Bir küre yüzeyinin paralel iki düzlem arasında kalan kısmına *küre kuşağı* denir (Şek. 190).



Şek. 190

Birbirine paralel olan kesit çemberlerine bu kuşağın *tabanları*, iki taban arasındaki uzaklığa da kuşağın *yüksekliği* denir.

Küre kuşağı, bir BE çember yayının $KK' = 2R$ çapı etrafında döndürülmesiyle elde edilebilir.

Burada meydana gelen kuşağın alanı BCDE düzgün çokgen çevre parçasının meydana getirdiği alanın limiti olarak düşünülürse:

$$S = 2\pi R \cdot B'E'$$

bulunur. $B'E' = h$ (kuşağın yüksekliği) olduğundan

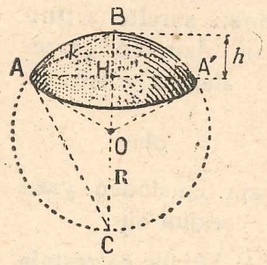
$$\boxed{S = 2\pi R \cdot h}$$

olur. Demek ki:

Bir küre kuşağının alanı, kürenin bir büyük çemberinin uzunluğu ile kuşağın yüksekliğinin çarpımına eşittir.

204. Küre kapağı. — Bir küre yüzeyi bir düzlemle kesilirse iki kısma ayrılır; bunlardan her birine *küre kapağı* denir.

Kesit çemberi, bu kapağın *tabanı* olur. Taban düzlemine dik olan küre çapının kapağı kestiği noktaya bu kapağın *tepesi*, tepenin taban düzlemine olan uzaklığına da kapağın *yüksekliği* denir. «Şek. 191» de (ABA') küre kapağının tepesi B ve yüksekliği $BH = h$ dir. Taban çemberinin bir A noktasını tepeye birleştiren $AB = k$ doğru parçasına bu kapağın *kutupsal yarıçapı* denir.



Şek. 191

Bir küre kapağını, bir tabanı sıfır olan bir küre kuşağı olarak kabul edebiliriz. Şu halde bu kapağın alanı:

$$\boxed{S = 2\pi R \cdot h}$$

olur. (Burada R kürenin yarıçapı, h ise bu kapağın yüksekliğidir).

205. Netice. — Bir küre kapağının alanı, yarıçapı kutupsal yarıçap olan bir dairenin alanına eşittir.

İspatı: ABC dik üçgeninde (Şek. 191):

$$\overline{AB}^2 = BH \cdot BC \quad \text{veya} \quad k^2 = h \cdot 2R$$

olduğundan, yukarıdaki formül: $\boxed{S = \pi k^2}$ şeklinde yazılabilir.

KÜRENİN HACMI

206. Teorem. — Yarıçapı R olan bir kürenin hacmı:

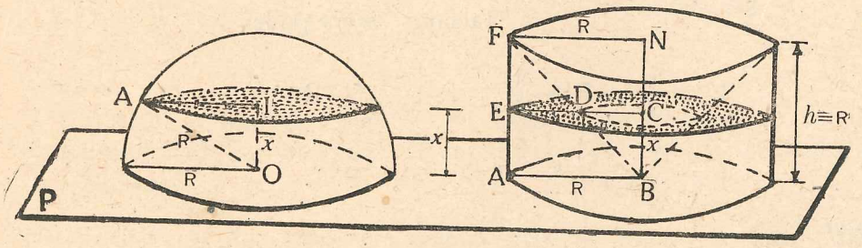
$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

dür.

İspatı: Merkezi O yarıçapı R olan bir yarım küre verilmiş olsun. Taban yarıçapı ve yüksekliği R kadar olan bir döner silindir ile bu silindirin üst tabanını taban ve alt taban merkezini tepe olarak kabul eden bir dönel koninin farkından ibaret olan cismi göz önüne alalım (Şek. 192). Ve bu cisim ile bu yarım kürenin hacımlarının eşit olacağını gösterelim:

Yarım dairenin tabandan x kadar uzaklıktaki kesiti bir dairedir. Bu dairenin alanı:

$$\pi \overline{IA}^2 = \pi (R^2 - x^2) \quad \text{dir.}$$



Şek. 192

Göz önüne aldığımız cismin tabandan x kadar uzaklıktaki kesiti bir daire halkasıdır. Burada

$$CE = NF = NB = R \quad \text{ve} \quad CD = CB = x$$

olacağından bu daire halkasının alanı da:

$$\pi \cdot \overline{CE}^2 - \pi \overline{CD}^2 = \pi (R^2 - x^2)$$

olur. Şu halde Kavaliyeri postulâtı gereğince bu cisim ile bu yarım kürenin hacımları eşittir. Buna göre:

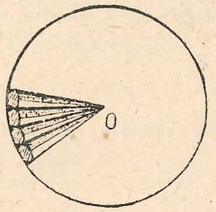
$$\frac{1}{2} V = \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R$$

$$\frac{1}{2} V = \frac{2}{3} \pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^2$$

bulunur.

207. Küre hacmının hesap yoliyle bulunması. — Yarıçapı R olan bir kürenin yüzeyini, alanları $s_1, s_2, s_3, \ldots\ldots, s_n, \ldots$ olan çok küçük parçalara ayıralım. Bu parçaları taban ve kürenin O merkezini de tepe olarak kabul eden piramitleri düşünelim (Şek. 193). Bunların yüksekliklerini kürenin yarıçapına eşit olarak kabul edebiliriz. Sonsuz sayıdaki bu piramitlerin hacımları toplamı kürenin hacmını vereceğinden:



Şek. 193

$$V = \frac{1}{3} s_1 \cdot R + \frac{1}{3} s_2 \cdot R + \frac{1}{3} s_3 \cdot R + \cdots\cdots$$

$$V = \frac{1}{3} (s_1 + s_2 + s_3 + \cdots\cdots) R$$

olur.

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots\cdots = S \qquad \text{(kürenin alanı)}$$

olduğundan

$$V = \frac{1}{3} S \cdot R$$

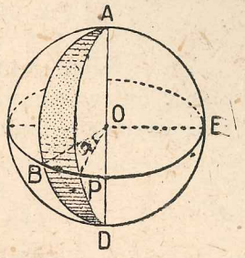
bulunur. Burada $S = 4\pi R^2$ konursa $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ elde edilir.

Not: Bu hacım formülü, kürenin $d\ (= 2R)$ çapı cinsinden yazılırsa

$$\boxed{V = \frac{1}{6} \pi d^3}$$ olur.

208. Netice. — **İki kürenin hacımlarının oranı, yarıçaplarının küblerinin oranına eşittir.**

209. Küre dilimi. — Kürenin bir AD çapından geçen iki yarım düzlem arasında kalan kısmına *küre dilimi* denir (Şek. 194).



Şek. 194

Bu iki yarım düzlem arasındaki açı $\widehat{BOP} = \alpha$ olduğuna göre bu dilimin hacmı:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{\alpha \cdot \pi R^3}{270}$$

olur. (Burada α derece cinsinden alınmıştır.)

Küre yüzeyinin ABD, APD yayları ile sınırlanan kısmı, bu dilimin *alanı* olur. Bu alan:

$$S = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{90}$$

olarak bulunur.

Not: BOP açısının radyan cinsinden ölçümü α' olursa bu küre diliminde

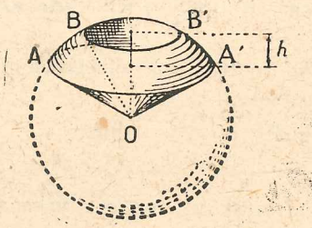
$$V = \frac{2R^3}{3} \cdot \alpha' \quad , \qquad S = 2R^2 \cdot \alpha'$$

olur.

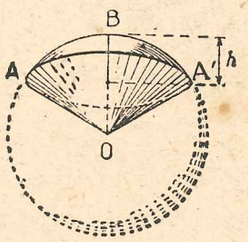
210. Küre kesmesi. — Bir AOB daire kesmesinin kendisini kesmiyen bir çap etrafında dönmesinden elde edilen hacma *küre kesmesi* denir.

Şek. 195 deki küre kesmesinin ABB'A' yüzü bir küre kuşağı, diğer iki yüzü ise birer koni yüzeyi olur. Burada küre kuşağının yüksekliği kesmenin de *yüksekliği dir.*

Şek. 196 daki küre kesmesinin ABA′ yüzü bir küre kapağı, diğer yüzü ise bir koni yüzeyi olur. Bu şekildeki küre kesmesine *kürevi koni* de denir. Burada küre kapağının yüksekliği, kesmenin de *yüksekliği* olur.



Şek. 195



Şek. 196

211. Küre kesmesinin hacmı. — Bir küre hacmının hesap yolu ile bulunmasındaki düşünüş tarzı burada da tekrar edilebilir. Şu halde kesmenin hacmı:

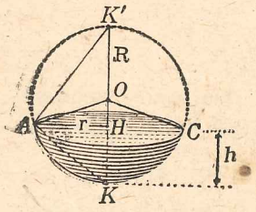
$$V = \frac{1}{3} S \cdot R = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R h \cdot R$$

$$\boxed{V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h}$$

olur. (Burada h kesmenin yüksekliğini, R ise kürenin yarıçapını göstermektedir).

212. Küre parçası — Bir küre kapağı ile bu kapağın taban dairesi tarafından sınırlanan cisme *küre parçası* denir (Şek. 197).

Bu küre parçası, (OAKC) küre kesmesiyle (OAC) konisinin farkı olarak düşünülürse, hacmı:



Şek. 197

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h - \frac{1}{3} \pi r^2 (R - h)$$

olur. AKK′ dik üçgeninde

$$r^2 = h(2R - h)$$

olduğundan:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h)}$$

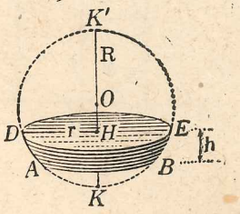
olarak bulunur. (Burada h küre parçasının yüksekliği, R de kürenin yarıçapıdır).

213. Küre tabakası. — Bir kürenin iki paralel düzlem arasında kalan kısmına *küre tabakası* denir (Şek. 198).

Kesit daireleri bu tabakanın *tabanları* olur. İki taban arasındaki uzaklığa *yükseklik* denir.

Bir küre tabakası iki küre parçasının farkı olarak düşünülürse, hacmı:

$$\boxed{V = \frac{1}{6} \pi h (3r^2 + 3r'^2 + h^2)}$$



Şek. 198

olarak bulunur. (Burada r, r' tabanların yarıçapları, h de yüksekliktir).

214. Uygulamalar:

1. Bir ayrıtı a olan düzgün dörtyüzlünün:

a) Dış küresinin, b) İç küresinin alan ve hacımlarını bulunuz.

Çözüm: ABCD düzgün dörtyüzlüsünde yüksekliklerin kesim noktası G olsun (Şek. 199). Bu nokta, her yüksekliği $\frac{3}{1}$ oranında bölündüğünden hem dış kürenin, hem de iç kürenin merkezi olur. Şu halde bu düzgün dörtyüzlünün:

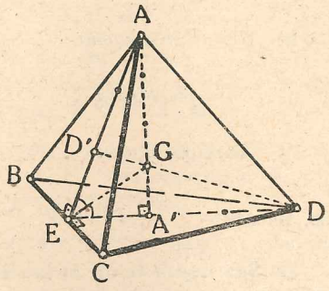
Dış küresinin yarıçapı:

$$GA = \frac{3}{4} AA' = \frac{a\sqrt{6}}{4};$$

İç küresinin yarıçapı:

$$GA' = \frac{AA'}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{12};$$

olur. Bunlara göre:



Şek. 199

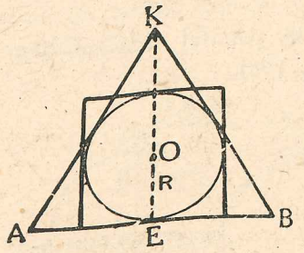
a) Dış kürenin: $alanı = \frac{3}{2} \pi a^2$, $hacmı = \frac{\sqrt{6}}{8} \pi a^3$;

b) İç kürenin: $alanı = \frac{\pi}{6} a^2$, $hacmı = \frac{\sqrt{6}}{216} \pi a^3$

olur.

2. R yarıçaplı bir kürenin dışına teğet olmak üzere bir dönel silindir ile bir eşkenar koni çizilmiştir. Gösteriniz ki:

a) Silindirin bütün alanı, kürenin alanı ile koninin bütün alanı arasında orta orantılıdır.



Şek. 200

b) Silindirin hacmı, diğer ikisinin hacımları arasında orta orantılıdır.

Çözüm: Verilen cisimleri koninin ekseninden geçen bir düzlemle kesersek, bir eşkenar üçgen, bir kare ve bunun ikisine de içten teğet olan bir çember elde ederiz (Şek. 200). Bu çember, kürenin bir büyük çemberi olup yarıçapı R dir.

Silindirin taban yarıçapı R, yüksekliği 2R olur.

Koninin yüksekliği $KE = 3R$ dir. Taban yarıçapı $AE = x$ ise, $AK = 2x$ olup,

$$4x^2 - x^2 = 9R^2$$

den $x = \sqrt{3}\ R$ bulunur. Bunlara göre:

a) *Silindirin bütün alanı:* $S = 2\pi R(R + 2R) = 6\pi R^2$;

Koninin bütün alanı: $S' = \pi x(x + 2x) = 9\pi R^2$;

Kürenin alanı: $S'' = 4\pi R^2$

olur. Burada $\boxed{S^2 = S' \cdot S''}$ olduğu aşikârdır.

b) *Silindirin hacmı:* $V = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$;

Koninin hacmı: $V' = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot 3R = 3\pi R^3$;

Kürenin hacmı: $V'' = \frac{4}{3}\pi R^3$

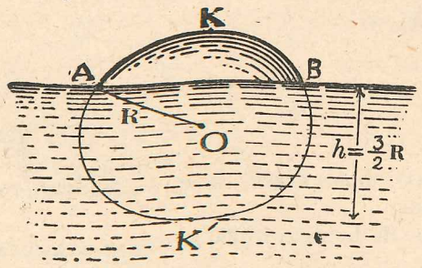
olur. Burada $\boxed{V^2 = V' \cdot V''}$ olduğu aşikârdır.

3. Saf suyun içine atılan tahtadan bir küre, çapının $\frac{3}{4}$ üne kadar batıyor. Bu tahtanın yoğunluğu nedir?

Çözüm: Bu tahta kürenin ağırlığı, batan kısmın hacmı kadar suyun ağırlığına eşittir (Şek. 201). Şu halde:

$$P \text{ (ağırlık)} = V \cdot D = V' \cdot 1$$

yazılır.



Şek. 201

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V' = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{9\pi R^3}{8}$

olduğundan:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \cdot D = \frac{9\pi R^3}{8}$$

$$D = \frac{27}{32} = 0{,}84375$$

bulunur.

X. BÖLÜM ÜZERİNE:

PROBLEMLER

1. *Bir kürenin yarıçapı* 2, 3, 4,... *kere büyürse:*

a) *Alanı* 2^2, 3^2, 4^2,... *kere büyür;*

b) *Hacmı* 2^3, 3^3, 4^3,... *kere büyür. Niçin?*

2. *Yer küresinin yarıçapı* 6370 km *olduğuna göre yer'in alanını ve hacmını bulunuz.* ($\pi = 22/7$ alınacaktır).

3. *Güneşin yarıçapı yer yarıçapının* 109 *katıdır. Güneşin alan ve hacmını yerinki ile karşılaştırınız.*

4. *Yerin yarıçapı ay'ınkinden* $3\frac{2}{3}$ *kere daha büyüktür. Ay ile yerin alan ve hacımları ne orandadır?*

5. *Yer ekvatorunun çevresi* 40 076 594 m *dir. Bu çevreye sarılan bir ip,* 1 m *arttırılırsa aradaki boşluk ne kadar olur, parmak sığar mı?* (Ce.: 15,9 cm)

6. *Bir kürenin merkezinden* 3 cm *uzaklıktaki kesitinin alanı* 50,24 cm^2 *olduğuna göre bu kürenin:* **a)** *yarıçapını,* **b)** *alanını,* **c)** *hacmını bulunuz.* ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır). (**Cevap:** 5 cm; 314 cm^2; 523,3 cm^3.)

7. *Çapı* 12 mm *olan küre biçimindeki bir kolyenin* 1 mm *si altın kaplama, diğer kısmı bakırdır. Bu kolyenin ağırlığını bulunuz.* (Bakırın yoğunluğu 8,8; altının yoğunluğu 19,26 dır). ($\pi = 3{,}14$). (**Cevap:** $P \cong 11{,}136$ g.)

8. *Çapı* 1 cm *ve kalınlığı* 1 mm *olan bir sabun köpüğü üflenerek çapı* 10 *kat büyütülüyor. Köpüğün kalınlığı, yüzeyi ile ters orantılı olarak değiştiğine göre kalınlık ne kadar olmuştur?* (**Cevap:** 0,01 mm.)

9. *Hidrojenle dolu olan* 5 m *çapındaki bir balonu, hava içinde yukarı doğru kaldıran kuvvet nedir?* (Yukarı kaldırma kuvveti, hava ağırlığı ile hidrojen ağırlığının farkına eşittir. Hidrojenin yoğunluğu 0,00009 havanın yoğunluğu 0,00129 dur.)

10. *Yoğunluğu* D = 8 *olan pirinçden yapılmış* R = 6 cm *yarıçaplı bir küre eritilerek içi boş bir küre haline konuluyor ve bu küre su içinde yüzüyor. Bu kürenin x dış ve y iç yarıçapları ne kadardır?*

(**Y. g**) Verilen kürenin ağırlığı, yüzen kürenin hacmı kadar suyun ağırlığına eşit olacaktır. $x = 12$ cm, $y = 6\sqrt[3]{7}$ cm bulunur.

11. *Yer küresinin yarıçapı* 6370 km *dir. Deniz yüzeyinden ne kadar yükseğe çıkmalıdır ki* 80080 km^2 *alanında bir küre kapağı görülebilsin?* ($\pi = \frac{22}{7}$ alınacaktır). (**Cevap:** $x \cong 2000{,}64$ m.)

12. R *yarıçaplı bir küre bir ışık kaynağından ne kadar uzaklığa konmalı ki yüzeyinin üçte biri aydınlatılmış olsun?* (**Cevap:** $x = 2$ R.)

13. 8 cm *yükseklikte bir küre parçasının hacmı* 176 cm³ *dür. Bu parçanın kesilmiş olduğu kürenin yarıçapı ne kadardır?* (**Cevap:** $R = \frac{85}{21}$ cm.)

14. *Madenden bir küre, yoğunluğu* D = 13,6 *olan cıva içinde yüzeyinin ancak üçte - biri bu sıvıya dokunacak surette batıyor. Madenin yoğunluğunu bulunuz.*

Cevap: $D' \cong 3{,}53$.

15. 6 m *yükseklik ve* 15 m *küre yarıçaplı, küre şeklinde bir kubbe* 0,6 m *kalınlıkta taş malzemeyle yapılmıştır. Bu kubbenin ağırlığı nedir?* (Taşın yoğunluğu 2,5 dir). (**Cevap:** 652,2408 ton.)

16. *Bir küre parçasının eğri yüzeyi tabanının üç katıdır. Kürenin yarıçarı* 6 cm *olduğuna göre parçanın yüksekliği ve hacmı ne kadardır?* (**Cevap:** $h = 8$ cm; $V = 669{,}87$ cm³

17. *Meşeden yapılan kürevi koni biçimindeki bir topacın ana doğrusu* 4 cm *ve yarım tepe açısı* 30° *dir. Bu topacın ağırlığını bulunuz.* (Meşenin yoğunluğu 1,2 dir.)

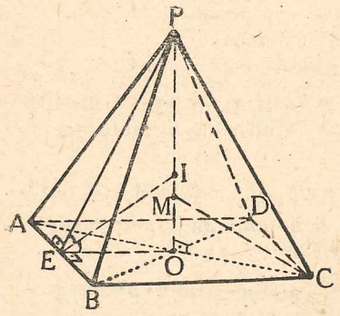
(Y. g.) Eksenden geçen kesiti göz önüne alınır.

18 R *yarıçaplı bir küre yüzeyi paralel iki düzlemle eşdeğerli üç kısma ayrılmıştır. Elde edilen küre parçaları ile küre tabakasının hacımlarını bulunuz.*

(Y. g.) Çapın üçe bölünece'ğini görünüz.

KARIŞIK PROBLEMLER

1. *Taban kenarı a ve yüksekliği* 2a *olan düzgün kare piramidin:* a) *dışına,* b *içine çizilen kürelerin yarıçaplarını bulunuz.*



Şek. 202

(Y. g) a) MP = MC = R olsun (Şek. 202); OMC dik üçgeninden faydalanınız.

b) PEO üçgenine açıortay teoremini uygulayınız. IO = r dir

Diğer yol: Verilen piramidi, tepeleri iç kürenin I merkezinde bulunan ve yükseklikleri r olan beş tane piramitten meydana gelmiş olarak düşününüz.

2. *Bir ayrıtı* $a = 12$ cm *olan düzgün sekizyüzlünün dış ve iç kürelerinin alan ve hacımlarını bulunuz.*

($\sqrt{6} = 2{,}45$, $\sqrt{2} = 1{,}4$ alınacaktır).

3. *Yarıçapı* R = 0,5 m *olan içi boş bir kürenin içine çizilen kübün bir kenarını ve hacmını bulunuz.*

(Y. g.) Kübün bir köşegeninin küre çapına eşit olacağını görünüz.

4. *Bir daireyi taban almak üzere, aynı yükseklikte bir yarım küre, bir koni ve bir dik silindir çiziliyor. Bunların hacımları ne orandadır?*

5. *İç yarıçapı* $r = 3$ cm *olan içi boş bir silindire* $h = 6$ cm *yüksekliğe kadar su doldurulmuştur. Suya bir küre daldırıldığı zaman* 4 cm *yükseliyor. Kürenin çapı ne kadardır?* (*Cevap:* 6 cm).

6. *İç kenarı* $a = 44$ cm *olan bir kübün içine yarıçapı* R = 14 cm *olan bir küre konmuş ve sonra küb yarısına kadar su ile doldurulmuştur. Küreyi çıkardığımız zaman suyun yüksekliği ne kadar düşer?* ($\frac{110}{21}$ cm düşer).

7. 5 cm *yarıçaplı bir demir kürede uzunluğu, çapının* $\frac{4}{3}$ *üne eşit olan bir kanal vardır. Ağırlığını bulunuz* (D = 7,8). (*Cevap:* $P \cong 2090$ g.)

8. $r = 4{,}8$ cm *ve* $h = 9{,}6$ cm *olan bir koninin dışına bir küre çiziliyor. Bu kürenin alanını ve hacmını hesaplayınız.* (*Cevap:* 452,16 cm²; 904,32 cm³)

9 *Bir koninin* ($r = 32$ cm, $h = 60$ cm) *içine bir küre yerleştiriliyor. Bunun hacmı ve alanı nedir?* (*Cevap:* $V \cong 29632{,}758$ cm³; $S \cong 4630{,}12$ cm².)

10. *Yanal alanı taban alanının 3 katı olan bir dönel koninin iç küresinin hacmı bu koni hacmının yarısına eşit olur. Niçin?*

(Y. g.) Bu konide ana doğru, taban yarıçapının üç katı olur. Eksenden geçen kesite açıortay teoremini uygulayarak $x = \frac{h}{4}$ olacağını bulunur. (x, küre yarıçapı; h, koni yüksek işidir.)

11. *Bir kürenin içine öyle bir dönel koni çiziliyor ki: kürenin merkezi koninin yükseklini* $\frac{3}{2}$ *oranında bölüyor. Bu iki cismin hacımlarının oranı nedir?* (*Cevap:* $\frac{108}{25}$.)

12. *Bir eşkenar koninin iç küresi çiziliyor:*

a) *Koninin yanal alanı ile kürenin alanı arasındaki oran nedir?*

b) *İç kürenin yanal yüzeye değme çemberinin uzunluğu* 62,8 cm *olduğuna göre bu cisimlerin hacımlarını bulunuz* ($\pi = 3{,}14$ alınacaktır. Eksenden geçen kesiti düşününüz.).

13. *Yarıçapı* R = 5 cm *olan bir çembere* PA, PB *gibi iki teğet çiziliyor; öyle ki* $\widehat{APB} = 60°$ *dir. Şekil,* PO *doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen hacmı hesaplayınız.* (*Cevap:* 588,75 cm³.)

14. *Bir koni* ($r = 4$ cm, $h = 2r$) *ile bir küre* (R = 4 cm) *aynı bir* (P) *düzlemi üzerinde durmaktadır. Bunların* (P) *düzleminden* x *kadar uzaklıktaki kesitlerinin eşit olması için* x *ne olmalıdır?* (*Cevap:* $x = 3{,}2$ cm.)

15. r *yarıçaplı bir kürenin içine çizilen eşkenar silindirin hacmı, bu kürenin içine çizilen eşkenar koninin hacmı ile küre hacmı arasında orta orantılı olur Niçin?* [Yüksekliği taban çapına eşit olan silindire *eşkenar silindir* denir.]

TRİGONOMETRİ

BÖLÜM XI

İLK TRİGONOMETRİ BİLGİSİ

AÇI VE YAY BİRİMLERİ

215. Derece. — Bir çemberin $\frac{1}{360}$ ine 1 *derecelik yay* ve bu yayı gören merkez açıya 1 *derecelik açı* denir. Bu açı 1° şeklinde gösterilir.

Derecenin $\frac{1}{60}$ ine *dakika*, dakikanın $\frac{1}{60}$ ine de *saniye* denir. Bunlar, 1′ ve 1″ şeklinde gösterilir. Demek ki:

$$1° = 60′ = 3600″$$

dir. Eğer $\widehat{A} = 15°20′30″$ yazılmışsa A açısı,

«15 derece 20 dakika 30 saniye» lik

bir açı demektir.

216. Grat. — Bir çemberin $\frac{1}{400}$ ine 1 *gratlık yay* ve bu yayı gören merkez açıya 1 *gratlık açı* denir. Bu açı 1^g şeklinde gösterilir.

Gradın $\frac{1}{10}$ ine *desigrat*, desigradın $\frac{1}{10}$ ine *santigrat*, santigradın $\frac{1}{10}$ ine *miligrat* denir. Bunlar, 1^{dg}, 1^{cg}, 1^{mg} şeklinde gösterilirler. Demek ki:

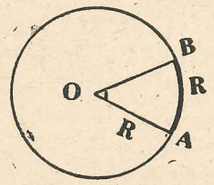
$$1^g = 10^{dg} = 100^{cg} = 1000^{mg}$$

dır. Eğer $\widehat{A} = 15^g\ 3^{dg}\ 5^{cg}\ 6^{mg}$ yazılmışsa A açısı,

«15 grat 3 desigrat 5 santigrat 6 miligrat» lık

bir açı demektir. Bu açı, gradın ondalığı olarak $\widehat{A} = 15^g, 356$ şeklinde gösterilir.

217. Radyan. — Bir çemberin yarıçap uzunluğundaki yayına 1 *radyanlık yay* ve bu yayı gören merkez açıya 1 *radyanlık açı* denir (Şek. 203).



Şek. 203

Bir çemberin uzunluğu $2\pi R$ olduğuna göre, bu çemberde R uzunluğundaki yaydan $2\pi = 6,28318...$ defa var demektir. Şu halde bir dairenin çevresi ve bu çevreyi gören merkez açı « 2π radyan » dır.

218. Açı ve yay birimlerinin birbirlerine çevrilmesi. — Yukardaki tanımlardan anlaşılır ki:

$$360° = 400^g = 2\pi \text{ radyan}$$

veya

$$180° = 200^g = \pi \text{ radyan}$$

dır. Bu eşitlik yardımiyle:

$$1° = \frac{\pi}{180} \text{ Rad.},\quad 1^g = \frac{\pi}{200} \text{ Rad.},\quad 1 \text{ Rad.} = \frac{180°}{\pi} = 57°17′45″,$$

$$1 \text{ Rad.} = \frac{200}{\pi} \text{ grat} = 93^g, 66.....$$

olduğu bulunur. Şu halde bir açı veya yayın derece, grat, radyan cinsinden ölçümleri sırayla D, G, R olduğuna göre

$$\frac{D}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

bağlılığı vardır. Bu formül yardımiyle açı birimleri kolayca birbirlerine çevrilir.

Örnekler :

1. $90°$ **lik bir açı veya yayın grat ve radyan olarak ölçümleri :**

$$\frac{90}{180} = \frac{G}{200} = \frac{R}{\pi}$$

den $\quad G = 100^g,\quad R = \frac{\pi}{2}$ radyan bulunur.

2. 40^g **lık bir açı veya yayın derece ve radyan olarak ölçümleri :**

$$\frac{D}{100} = \frac{40}{200} = \frac{R}{\pi}$$

den $\quad D = 36°,\quad R = \frac{\pi}{5}$ radyan bulunur.

3. $\frac{5\pi}{6}$ **radyanlık bir açı veya yayın derece ve grat olarak ölçümleri:**

$$\frac{D}{180}=\frac{G}{200}=\frac{\frac{5\pi}{6}}{\pi}=\frac{5}{6}$$

dan $D = 150°$, $G = 160^g,666\ldots$ bulunur.

Sorular:

1. 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330° lik açı veya yayların radyan cininden değerleri nedir?

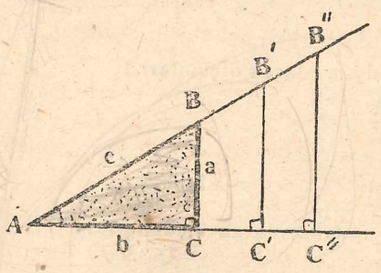
2. 40^g, 80^g, 120^g, 160^g, 350^g lık açı veya yayların radyan cinsinden değerleri nedir?

3. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{15}$, $\frac{11\pi}{15}$ radyanlık yayların derece ve grat olarak ölçümleri nedir?

DAR AÇILARIN TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI

219. Trigonometrinin tanımı ve amacı. — Trigonometri [*], üçgenlerin hesap yolu ile çözümünden bahseden bir bilimdir. Bir üçgeni çözmek demek, o üçgenin bilinen elemanları yardımiyle bilinmiyen elemanlarını bulmak demektir. Bu işi, buraya kadarki bilgilerimizle yapamayız. Ancak, verilen elemanlar yardımiyle üçgeni çizer ve bilinmiyen elemanların sayı değerlerini, uzunlukları cetvelle, açıları da iletki ile ölçerek bulabiliriz. Halbuki bu ölçme, bize kesin sonucu veremez. İşte trigonometrinin amacı, bu işlemi hesap yolu ile yapmaktır. Çizilen şeklin diğer elemanlarını hesap yoliyle bulabilmek için ise, açı ile uzunluklar arasındaki bağlılıkların bilinmesi lâzım gelir. Aşağıda bu bağlılıkları göreceğiz:

220. Trigonometrik oranlar. — Bir ABC dik üçgeninin a, b, c kenarları arasında ikişer ikişer $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}$ ve $\frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$ gibi, altı oran yazılır. A dar açısı sabit kalmak üzere kenar uzunlukları değiştirilse, elde edilen ABC, AB′C′, AB″C″ dik üçgenleri benzer olacağı için yukardaki oranların her biri değerce sabit kalır.



Şek 204

Meselâ, «Şek. 204» de

[*] Trigonometri kelimesi, eski Yunanca «üçgen» ve «ölçü» kelimelerinden gelir. Trigonometrinin ilk temeli, IX. yüzyıl başlarında Şarklılar tarafından atılmıştır.

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}$$

dür. A açısı değiştirilirse oranların değerleri de değişir. A açısına bağlı olan bu $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$ oranlarına sıra ile **A** açısının *sinüs'ü, kosinüs'ü, tangent'i, kotangent'ı, sekant'ı, kosekant'ı* denir ve kısaca:

$$\sin A=\frac{a}{c} \qquad \cos A=\frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tg} A=\frac{a}{b},$$

$$\operatorname{cotg} A=\frac{b}{a}, \qquad \sec A=\frac{c}{b}, \qquad \operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}$$

şekillerinde gösterilir. Bunlara A açısının *trigonometrik oranları* (veya *trigonometrik fonksiyonları*) denir. Demek ki bir dik üçgende bir dar açı için:

$$\text{sin.}=\frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{hipotenüs}}, \quad \text{cos.}=\frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{hipotenüs}}, \quad \text{tg.}=\frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}},$$

$$\text{cotg.}=\frac{\text{komşu dik kenar}}{\text{karşı dik kenar}}, \quad \text{sec.}=\frac{\text{hipotenüs}}{\text{komşu dik kenar}}, \quad \text{cosec.}=\frac{\text{hipotenüs}}{\text{karşı dik kenar}}$$

dır. Pratikte bunlardan en fazla sin., cos., tg., cotg. kullanılır.

İhtar: Bir açının trigonometrik oranları, birimi 1 olan boyutsuz sayılardan ibarettir. Yani m, cm,..... gibi ölçü birimleri ile ölçülmezler.

221. Not: Bir dik üçgende, her dik kenar, daima hipotenüsten küçük olur. Şu halde, sinüs ve kosinüs değerleri 1 den küçüktür. Sekant ve kosekant değerleri ise 1 den büyüktür. Tangent ve kotangent de her değeri alabilir.

222. Neticeler:

I. — Bir ABC $(\widehat{C}=90°)$ dik üçgeninde (Şek. 205):

1°. $a = c \cdot \sin A$; 2°. $b = c \cdot \cos A$;

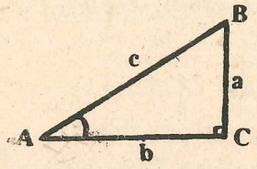
3°. $a = b \cdot \operatorname{tg} A$; 4°. $b = a \cdot \operatorname{cotg} A$ dır.

II. — $\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{cotg} A = 1$ dir. (Çünkü, $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ dir.) Demek ki

$$\operatorname{cotg} A=\frac{1}{\operatorname{tg} A} \quad \text{ve} \quad \operatorname{tg} A=\frac{1}{\operatorname{cotg} A} \quad \text{dır.}$$

III. — $\frac{\sin A}{\cos A} = \text{tg } A$ dır (Çünkü,

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} \text{ dir).}$$



Şek. 205

IV. — $\frac{\cos A}{\sin A} = \text{cotg } A$ dır.

V. — $\sec A = \frac{1}{\cos A}$ dır.

VI. — $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}$ dır.

223. Teorem. — **Bir açının sinüsü ile kosinisünün kareleri toplamı, daima 1 e eşittir.**

İspatı: ABC dik üçgeninde $a^2 + b^2 = c^2$ dir. Bu,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

şeklinde yazılır ve $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$ konursa

$$\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$$

bulunur (Şek. 205).

224. Teorem. — **Birbirinin tümleri olan iki açının,**

1°. Birinin sinüsü diğerinin kosinüsüne:

2°. Birinin tangenti diğerinin kotangentine eşittir.

İspatı: Şek. 205 de $\widehat{A} + \widehat{B} = 90°$ dir. $\sin B = \frac{b}{c} = \cos A$,

$\cos B = \frac{a}{c} = \sin A$, $\text{tg } B = \frac{b}{a} = \text{cotg } A$, $\text{cotg } B = \frac{a}{b} = \text{tg } A$

olduğu hemen görülür. $\widehat{B} = 90° - \widehat{A}$ olduğundan yukardaki eşitlikler:

$\sin (90° - A) = \cos A$, $\cos (90° - A) = \sin A$,

$\text{tg } (90° - A) = \text{cotg } A$, $\text{cotg } (90° - A) = \text{tg } A$

şeklinde yazılabilir.

225. Teorem. — **Bir üçgenin alanı, iki kenarı ile, bu kenarlar arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısına eşittir.**

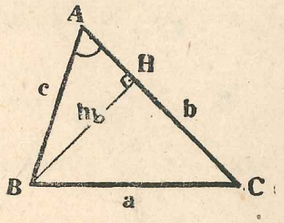
İspatı: ABC üçgeninin alanı $S = \frac{1}{2} b \cdot h_b$

dir. ABH dik üçgeninde (Şek. 206):

$\frac{h_b}{c} = \sin A$ veya $h_b = c \cdot \sin A$

olduğundan

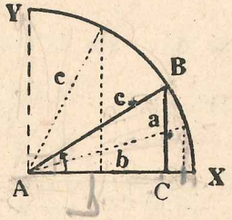
$$\boxed{S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A}$$ bulunur.



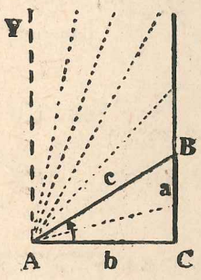
Şek. 206

226. Önemli açılar. — **0°, 30°, 45°, 60°, 90° lik açıların trigonometrik oranları:**

1°. Şek. 207 de ABC dik üçgeninin AB = c hipotenüsü sabit uzunlukta alınmıştır. A açısı küçüldükçe, B köşesi X e doğru yaklaşır. BC = a kenarı küçülür; AC = b kenarı büyür. $\widehat{A} = 0°$ olunca, B köşesi X e gelir ve $a = 0$, $b = c$ olur. Şu halde:



Şek. 207



Şek. 208

$\sin 0° = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0$,

$\cos 0° = \frac{b}{c} = \frac{c}{c} = 1$,

$\text{tg } 0° = \frac{a}{b} = \frac{0}{c} = 0$ ve $\text{cotg } 0° = \frac{b}{a} = \frac{c}{0} = \infty$ olur.

A açısı 0° den 90° ye kadar artarsa B köşesi, X den Y ye doğru yaklaşır. BC = a, kenarı, 0 dan c değerine kadar artar. AC = b kenarı, c değerinden 0 a kadar azalır. $\widehat{A} = 90°$ olunca, B köşesi Y ye gelir ve $a = c$, $b = 0$ olur. Şu halde:

$\sin 90 = \frac{a}{c} = \frac{c}{c} = 1$, $\cos 90° = \frac{b}{c} = \frac{0}{c} = 0$,

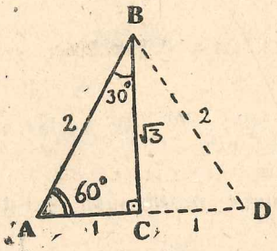
$\text{tg } 90° = \frac{a}{b} = \frac{c}{0} = \infty$, $\text{cotg } 90° = \frac{b}{a} = \frac{0}{c} = 0$ olur.

Şek. 208 de ABC dik üçgeninin $AC = b$ dik kenarı sabit alınmıştır; yukardaki sonuçları bu şekilden de bulunuz.

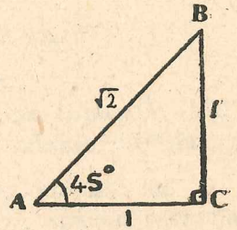
2°. Şek. 209 da: $\sin 30° = \frac{1}{2} = \cos 60°$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$,

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{cotg} 60°, \quad \operatorname{cotg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$$

olduğu kolayca görülmektedir.



Şek. 209



Şek. 210

3°. Şek. 210 da da: $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\operatorname{tg} 45° = 1$, $\operatorname{cotg} 45° = 1$ olduğu kolayca görülmektedir.

ÖZET

$\widehat{A}$	sin A	cos A	tg A	cotg A
0°	0	1	0	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	0

227. Not: «Şek. 207 - 208» in ve ayrıca yukardaki tablonun incelenmesinden kolayca anlaşılır ki:

Bir A açısı 0° den 90° ye kadar artarsa:

1°. Sinüsü 0 dan 1 e kadar artar.

2°. Kosinüsü 1 den 0 a kadar azalır.

3°. Tangenti 0 dan ∞ a kadar artar.

4°. Kotangenti ∞ dan 0 a kadar azalır.

5°. Trigonometrik fonksiyonlarının artış veya azalışı, açı ile orantılı değildir. Meselâ açı iki kat büyüyünce, onun sinüsü iki kat büyümez ($\sin 60° \neq 2 \sin 30°$).

Ödevler:

1. Değerlerini yerlerine koyarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz:

a) $2 \sin 30° \cdot \cos 30° = \sin 60°$;

b) $\cos 60° = \cos^2 30° - \sin^2 30° = 2\cos^2 30° - 1 = 1 - 2\sin^2 30°$.

2. $\widehat{A} = 30°$, $b = 4$ cm, $c = 7$ cm olan üçgenin alanını hesaplayınız.

3. Bir açısı 60° ve iki kenarı 5 cm, 8 cm olan paralelkenarın alanını hesaplayınız.

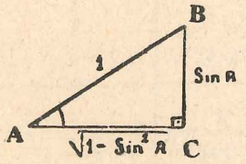
228. Bir açının trigonometrik oranlarından birisi belli iken diğerlerini bulmak:

1°. sin A *cinsinden diğerleri:*

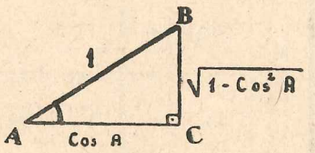
ABC ($\widehat{C} = 90°$) dik üçgeninde $AB = 1$ alınırsa (Şek. 211):

$BC = \sin A$, $AC = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ ve $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}}, \qquad \operatorname{cotg} A = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{\sin A} \text{ olur.}$$



Şek. 211



Şek. 212

2°. cos A *cinsinden diğerleri:*

ABC ($\widehat{C} = 90°$) dik üçgeninde $AB = 1$ alınırsa (Şek. 219):

$AC = \cos A$, $BC = \sqrt{1 - \cos^2 A}$ ve $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$,

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 A}}{\cos A}, \qquad \operatorname{cotg} A = \frac{\cos A}{\sqrt{1 - \cos^2 A}} \text{ olur.}$$

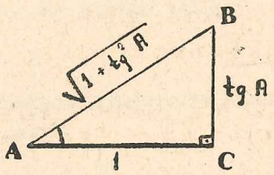
3°. tgA *cinsinden diğerleri :*

ABC $(\widehat{C}=90°)$ dik üçgeninde AC = 1 alınırsa (Şek. 213):

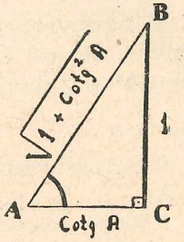
$BC = \text{tg A}$, $AB = \sqrt{1+\text{tg}^2 A}$ ve $\sin A = \frac{\text{tg A}}{\sqrt{1+\text{tg}^2 A}}$,

$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 A}}$, $\text{cotg A} = \frac{1}{\text{tg A}}$

olur.



Şek. 213



Şek. 214

4°. cotg A *cinsinden diğerleri :*

ABC $(\widehat{C}=90°)$ dik üçgeninde BC = 1 alınırsa (Şek. 214):

$AC = \text{cotg A}$, $AB = \sqrt{1+\text{cotg}^2 A}$ ve $\sin A = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 A}}$,

$\cos A = \frac{\text{cotg A}}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 A}}$, $\text{tg A} = \frac{1}{\text{cotg A}}$ olur.

ÖZET

İSTENENLER	VERİLENLER: sin A	cos A	tg A	cotg A
sin A =	—	$\sqrt{1-\cos^2 A}$	$\frac{\text{tg A}}{\sqrt{1+\text{tg}^2 A}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 A}}$
cos A =	$\sqrt{1-\sin^2 A}$	—	$\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 A}}$	$\frac{\text{cotg A}}{\sqrt{1+\text{cotg}^2 A}}$
tg A =	$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$	—	$\frac{1}{\text{cotg A}}$
cotg A =	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$	$\frac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{1}{\text{tg A}}$	—

Ödevler: 1) tg A = 2; 2) sin A = 0,8; 3) cos A = 0,04; 4) cotg A = $\sqrt{3}$ olduğu zaman, A açısının diğer trigonometrik fonksiyonlarını bulunuz.

PROBLEMLER

1. *Aşağıdaki özdeşliklerin doğruluğunu gösteriniz :*

a) $1+\text{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$; b) $1+\text{cotg}^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$;

c) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\text{tg}^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\text{cotg}^2 A} = 1$;

d) $\text{tg A} + \text{cotg A} = \frac{1}{\sin A \cdot \cos A}$; e) $\frac{\text{tg A} - \text{cotg B}}{\text{tg B} - \text{cotg A}} = \text{tg A} \cdot \text{cotg B}$

f) $\frac{\cos A}{1-\text{tg A}} + \frac{\sin A}{1-\text{cotg A}} = \sin A + \cos A$; g) $\cos^4 A - \sin^4 A = 2\cos^2 A - 1$.

2. *Aşağıdaki eşitliklere uyan x açılarını bulunuz :*

a) $\cos 2x = \sin 3x$; Çözüm:

$\cos 2x = \sin (90° - 2x)$ olduğundan $\sin (90° - 2x) = \sin 3x$ yazılır. Sinüsleri eşit olunca açılar da eşit olacağı için $90° - 2x = 3x$ veya $x = 18°$ bulunur.

b) $\sqrt{2}\cos x = \text{cotg } x$; c) $\sin x = \cos 4x$; d) $\text{tg } x = \text{cotg } 2x$; e) $2\sin^2 x = 1$; f) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 1$; g) $\sin x \cdot \text{tg} x = \sin x + \text{tg} x - 1$.

TRİGONOMETRİ CETVELİ

229. Dar açıların trigonometrik oranlarını veren cetvel, kitabın sonuna eklenmiştir. Bu cetvelin yapılışı «No. 224» sayesinde kısaltılmış ve tümler açılar, aynı satıra karşılıklı yazılmıştır. Cetveli kullanırken, solda okunan 0° den 45° ye kadar olan açılar için üstteki başlıklar; sağda okunan 45° den 90° ye kadar olan açılar için de alttaki başlıklar kullanılır. Cetvel iki mühim işe yarar :

1. **Verilen bir açının trigonometrik oranlarını bulmak [*];**

2. **Trigonometrik oranları bilinen açıyı bulmak.**

1. a) Verilen açı cetvelde varsa, trigonometrik oranları kolayca bulunur.

b) Verilen açı cetvelde yoksa, bu açı, cetvelde yazılı iki açı arasında bulunur ve bir orantı işlemi yapılır.

Örnek 1. — $\sin 21° 20' = ?$

Çözüm: Cetvelde, $\sin 21°$ = 0,3584

$\sin 22°$ = 0,3746

artış 60′ , 0,0162 dir. Şu halde:

Açı 60′ artınca sinüsü 0,0162 kadar artıyor;

Açı 20′ » » x » artar. Buradan

[*] Bunu, cetvelsiz yapmak için, bir dar açısı verilen açı kadar olmak üzere bir dik üçgen çizilir; kenarlar ölçülür ve oranlanır. Fakat bu, ne de olsa hatalı olur. Cetveldeki değerler, yüksek matematiğin bazı formülleri sayesinde hesaplanmıştır.

$$x = \frac{20' \cdot 0{,}0162}{60'} = 0{,}0054$$ bulunur ve:

$$\sin 21°20' = 0{,}3584 + 0{,}0054 = 0{,}3638$$ olur.

Örnek 2. — $\cos 23° 12' = ?$

Çözüm: Cetvelde,

$\cos 23°$	=	0,9205
$\cos 24°$	=	0,9135
artış $60'$	, azalış	0,0070 dir.

Şu halde:

Açı $60'$ artınca kosinüsü 0,0070 kadar azalıyor;
Açı $12'$ » » x » azalır. Buradan

$$x = \frac{12' \cdot 0{,}0070}{60'} = 0{,}0014$$ bulunur ve:

$$\cos 23°12' = 0{,}9205 - 0{,}0014 = 0{,}9191$$ olur.

İhtar: Açının artışı ile sinüsün artışı (veya kosinüsün azalışı) orantılı olmamakla beraber, çok küçük artışlar için orantılı gibi almakta büyük bir mahzur yoktur.

2°. a) Verilen değer cetvelde varsa, açı kolayca bulunur.

Örnek 1. — $\text{tg } A = 0{,}3249$ olduğuna göre $\widehat{A} = ?$ dir.

Çözüm: $\text{tg } 45° = 1$ dir. $0{,}3249 < 1$ olduğundan $\widehat{A} < 45°$ dir. Onun için, cetvelin yukarısındaki başlıklardan tangent sütununda 0,3249 sayısı aranırsa 18° nin karşısında bulunur. Şu halde $\widehat{A} = 18°$ dir.

Örnek 2. — $\cos A = 0{,}3256$ dır. $\widehat{A} = ?$

Çözüm: $\cos 45° = 0{,}7071$ dir. $0{,}3256 < 0{,}7071$ olduğundan $\widehat{A} > 45°$ dir. Onun için, cetvelin aşağısındaki başlıklardan kosinüs sütununda 0,3256 sayısı aranırsa 71° nin karşısında bulunur. Şu halde $\widehat{A} = 71°$ dir.

b) Verilen değer cetvelde yoksa, bu değerin, ilgili sütunda hangi iki sayı arasında olduğu bulunur ve bir orantı işlemi yapılır.

Örnek 1. — $\sin A = 0{,}3638$ dir. $\widehat{A} = ?$

Çözüm: Cetvelde,

0,3584	=	$\sin 21°$
0,3746	=	$\sin 22°$
artış 0,0162		$60'$ dır.

Şu halde

sinüs 0,0162 kadar artarken açı $60'$ artıyor;
sinüs 0,0054 » » açı x kadar artar. Buradan

$$x = \frac{0{,}0054 \cdot 60'}{0{,}0162} = 20'$$ bulunur ve $\widehat{A} = 21° + 20' = 21°20'$ olur.

Örnek 2. — $\cos A = 0{,}9198$ dir. $\widehat{A} = ?$

Çözüm: Cetvelde,

0,9205	=	$\cos 23°$
0,9135	=	$\cos 24°$
azalış 0,0070	, artış	$60'$ dır.

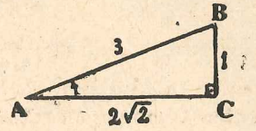
Şu halde:

kosinüs 0,0070 kadar azalırken açı $60'$ artıyor;
kosinüs 0,0007 » » açı x kadar artar. Buradan

$$x = \frac{0{,}0007 \cdot 60'}{0{,}0070} = 6'$$ bulunur ve $\widehat{A} = 23° + 6' = 23°6'$ olur.

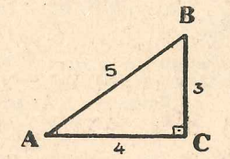
Not: Trigonometrik oranlarından birisi bilinen açıyı iletkisiz çizmek mümkündür.

Örnek 1. — $\sin A = \frac{1}{3}$ olsun; BC dik kenarı 1 ve hipotenüsü 3 birim olmak üzere çizilen ABC dik üçgeninde $\widehat{A}$, istenilen açıdır (Şek. 215).



Şek. 215

Örnek 2. — $\text{tg } A = 0{,}75$ olsun; $0{,}75 = \frac{3}{4}$ olduğundan, BC dik kenarı 3 ve AC dik kenarı 4 birim olmak üzere çizilen ABC dik üçgeninde $\widehat{A}$, istenilen açıdır (Şek. 216).



Şek. 216

Ödevler:

a) $\sin 54° = ?$ b) $\cos 65° 10' = ?$
c) $\text{tg } 15° 5' = ?$ d) $\text{cotg } 70° 12' = ?$

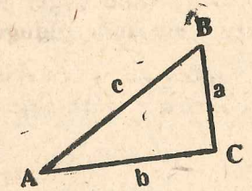
2. Aşağıdaki eşitliklere uyan x açılarını bulunuz:

a) $\sin x = 0{,}5886$; b) $\cos x = 0{,}4567$;
c) $\text{tg } x = 1{,}2675$; d) $\text{cotg } x = 2{,}3645$; e) $4 \sin 2x = 1$; f) $2 \text{ tg } 2x = 3$.

DİK ÜÇGENLERİN ÇÖZÜMÜ

230. Bir dik üçgenin çözümü, aşağıdaki dört temel ödevin çözümüne götürülebilir:

1°. Bir dar açı ve hipotenüs;
2°. Bir dar açı ve bir dik kenar;
3°. Bir dik kenar ve hipotenüs;
4°. İki dik kenar.



Şek. 217

231. Bir dar açısı ile hipotenüsü bilinen dik üçgeni çözmek:

Verilenler: $\widehat{A}$, c (Şek. 217);

İstenenler: $\widehat{B}$, a, b.

Çözüm: $\widehat{B} = 90° - A$, $a = c \cdot \sin A$, $b = c \cdot \cos A$ formüllerinden yapılır.

Örnek: $\widehat{A} = 32° 25'$, $c = 18$ m olsun;

$\widehat{B} = 90° - 32°25' = 57° 35'$, $a = 18 \sin 32° 25' = 18 \cdot 0{,}5360 = 9{,}648$ m.

$b = 18 \cdot \cos 32° 25', = 18 \cdot 0{,}8442 = 15{,}1956$ m olur.

156. Bir dar açısı ile bir dik kenarı bilinen dik üçgeni çözmek:

I. Verilenler: $\widehat{A}$, a (açı ve karşı dik kenar) (Şek. 217);

İstenenler: $\widehat{B}$, b, c.

Çözüm: $\widehat{B} = 90° - \widehat{A}$, $b = a \operatorname{cotg} A$, $c = \dfrac{a}{\sin A}$

formüllerinden yapılır.

Örnek: $a = 172$ m, $\widehat{A} = 28° 40'$ olsun;

$\widehat{B} = 90° - 28° 40' = 61° 20'$, $b = 172 \cdot \operatorname{cotg} 28° 40' = 172 \cdot 1{,}8296 =$ 314,691 m, $c = \dfrac{172}{\sin 28° 40'} = \dfrac{172}{0{,}4797} = 358{,}557$ m olur.

II. Verilenler: $\widehat{B}$, b (açı ve komşu dik kenar) (Şek. 217).

İstenenler: $\widehat{B}$, a, c.

Çözüm: $\widehat{B} = 90° - \widehat{A}$, $a = b \cdot \operatorname{tg} A$, $c = \dfrac{b}{\cos A}$, formüllerinden yapılır. Yahut, $\widehat{B}$ bulunduktan sonra yukardaki gibi yapılır.

Ödev. — $\widehat{A} = 65° 30'$, $b = 174$ m olduğuna göre çözümü yapınız.

233. Bir dik kenarı ile hipotenüsü bilinen dik üçgeni çözmek:

Verilenler: a, c (Şek. 217);

İstenenler: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, b.

Çözüm: $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\widehat{B} = 90° - \widehat{A}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} =$ $\sqrt{(c-a)(c+a)}$ veya $b = c \cdot \cos A$ formüllerinden yapılır.

Örnek: $a = 275$ m, $c = 373$ m olsun;

$\sin A = \dfrac{275}{373} = 0{,}7373$ den $\widehat{A} = 47° 30'$ bulunur. $\widehat{B} = 90° - 47°30' =$ $42° 30'$, $b = \sqrt{(373 - 275)(373 + 275)} = \sqrt{98 \cdot 648} = 252$ m olur.

234. İki dik kenarı bilinen dik üçgeni çözmek:

Verilenler: a, b (Şek. 217);

İstenenler: $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, c.

Çözüm: $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$, $\widehat{B} = 90° - \widehat{A}$,

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ veya $c = \dfrac{a}{\sin A}$ formüllerinden yapılır.

Örnek: $a = 48$ m, $b = 55$ m olsun;

$\operatorname{tg} A = \dfrac{48}{55} = 0{,}8727$ den $\widehat{A} = 41°7'$ bulunur.

$\widehat{B} = 90° - 41°7' = 48°53'$, $c = \sqrt{48^2 + 55^2} = 73$ m olur.

Not: Sayılar büyük verilirse hipotenüsü, $c = \dfrac{a}{\sin A}$ formülünden bulmak daha kolay olur.

PROBLEMLER

1. *Aşağıdaki elemanları bilinen* ABC ($\widehat{C} = 90°$) *dik üçgenlerini çözünüz:*

1) $\widehat{A} = 63°12'$, $c = 233$ cm; 2) $\widehat{A} = 60°8'$, $a = 209$ cm;

3) $\widehat{B} = 55°17'$, $b = 1547$ cm; 4) $a = 272$ cm, $c = 353$ cm;

5) $a = 97{,}5$ cm, $b = 68{,}4$ cm; 6) $\widehat{A} = 40°$, $h = 24$ cm;

7) $\widehat{A} = 50°$, $r = 28{,}6$ cm; 8) $S = 150$ cm², $a = 20$ cm.

2. *Aşağıdaki elemanları bilinen* ABC (AB = AC) *ikizkenar üçgenlerini çözünüz:*

1) $\widehat{B} = 54°$, $c = 10$ cm; 2) $\widehat{A} = 36°$, $b = 10$ cm;

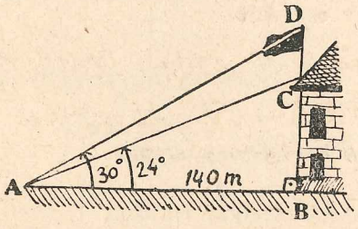
3) $a = 80$ cm, $b = 50$ cm; 4) $S = 7{,}608$ cm², $b = 4$ cm;

3. ABC ($\widehat{A} = 90°$) *dik üçgeninin açı ve kenarları arasında, aşağıdaki bağlılıkların varlığını gösteriniz:*

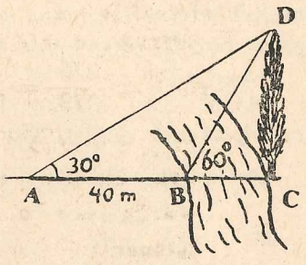
1) $\sin^2 B + \sin^2 C = 1$; 2) $\sin B \cdot \operatorname{tg} B = \dfrac{b^2}{a \cdot c}$; 3) $\dfrac{\sin B + \cos C}{\cos B + \sin C} = \operatorname{tg} B$;

4) $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$; 5) $\operatorname{cotg} \dfrac{B}{2} = \dfrac{a + c}{b}$.

4 *Bir apartıman'a* 140 m *uzaklıkta bulunan* A *gibi bir yerden, apartıman'ın üzerine dikilmiş bir bayrak direğinin alt ucunu görmek için, dürbün yataydan* 24° *yukarıya ve üst ucunu görmek içinde dürbün yataydan* 30° *yukarıya kaldırılıyor. Apartıman'ın ve bayrak direğinin yüksekliğini bulunuz* (Şek. 218).



Şek. 218



Şek. 219

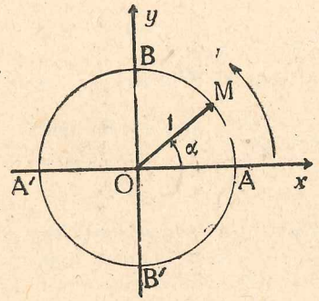
5. *Bir ırmağın kenarında duran bir şahıs, karşı sahildeki bir ağaçın tepesini görmek için, dürbününü yataydan* 60° *yukarıya ve ırmağa dik istikamette 40 metre geriye gidince de, dürbününü yataydan* 30° *yukarıya kaldırıyor. Irmağın genişliğini ve ağaçın yüksekliğini bulunuz* (Şek. 219).

BÖLÜM XII

AÇI KAVRAMININ GENELLEŞTİRİLMESİ

HER HANGİ BİR AÇININ TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI

235. Trigonometri çemberi. — Yarıçapı 1 birim uzunlukta olan ve üzerinde bir hareket yönü seçilen çembere *trigonometri çemberi* veya *birim çember* adı verilir.



Şek. 220

Bu çember üzerinde A gibi bir nokta *başlangıç* olarak alınır. Bütün yaylar ve bu yayların merkez açıları bu noktadan itibaren hesaplanır (Şek. 220).

Seçilen hareket yönü, saat ibrelerinin ters gidiş yönü olursa bu yön *pozitif*, aksi halde *negatif* olur.

Bir M noktası, çember üzerinde A dan başlıyarak pozitif yönde hareket ederse meydana gelen AM yayları ve bunların AOM merkez açıları pozitif, aksi halde negatif olur.

$\widehat{AOM} = \alpha$ açısının büyüklüğü, AM yayının büyüklüğü ile orantılı olarak değişir. Şu halde:

M noktası bir devir yapmışsa $\alpha = 2\pi$ radyan $= 360°$,

M » iki » » $\alpha = 4\pi$ radyan $= 720°$,

M » k » » $\alpha = 2k\pi$ radyan $= k \cdot 360°$

olur. Burada k, pozitif ve negatif olabilen bir sayıdır. Demek ki trigonometride 360° den büyük açılar da kullanılır.

236. Her hangi bir açının trigonometrik fonksiyonları.— «No. 220» de bir dar açının trigonometrik fonksiyonlarını gördük. Şimdi de α, her hangi bir açı olduğuna göre trigonometrik fonksiyonlarını tanıtacağız:

$\widehat{xOz} = \alpha$ açısının O köşesi merkez olmak üzere 1 birim yarıçaplı trigonometri çemberini çizelim (Şekil: 221, 222, 223, 224).

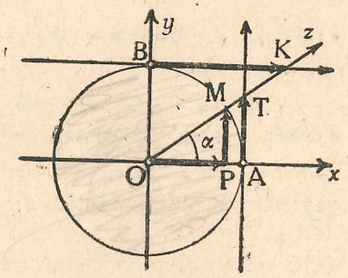
Açının Ox başlangıç kenarını apsisler ekseni ve buna dik olan Oy yi de ordinatlar ekseni olarak seçelim. Birim çember, bu eksenlerin pozitif taraflarını A ve B de kessin. Çemberin A ve B deki teğetlerini çizerek, bunları da Ox ve Oy gibi yönlendirelim. Burada:

Ox eksenine *kosinüsler ekseni*,

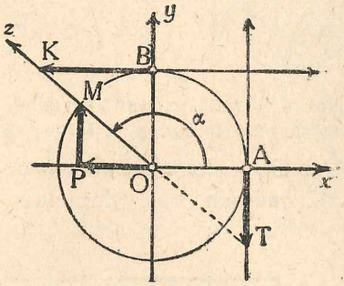
Oy eksenine *sinüsler ekseni*,

A daki teğete *tangetler ekseni*,

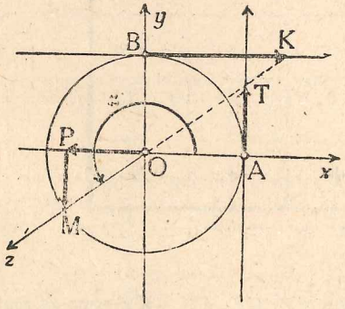
B deki teğete *kotangentler ekseni* adı verilir.



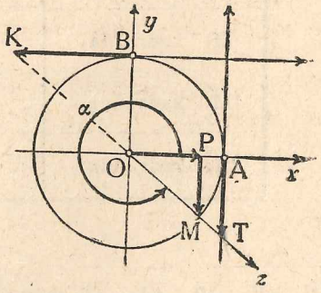
α dar açı
Şek. 221



α geniş açı
Şek. 222



$180° < \alpha < 270°$
Şek. 223



$270° < \alpha < 360$
Şek. 224

$\widehat{xOz} = \alpha$ açısının Oz bitim kenarı:

Trigonometri çemberini M noktasında,

Tangetler eksenini T noktasında,

Kontangentler eksenini K noktasında kesmiş olsun; tanım olarak:

M nin ordinatına α açısının *sinüsü*,

M nin apsisine α açısının *kosinüsü*,

T nin ordinatına α açısının *tangenti*,

K nin apsisine α açısının *kotangenti*

denir.

Yukardaki dört şekilde de:

$\sin\alpha = \overline{PM}$, $\cos\alpha = \overline{OP}$, $\operatorname{tg}\alpha = \overline{AT}$, $\operatorname{cotg}\alpha = \overline{BK}$

dır [*].

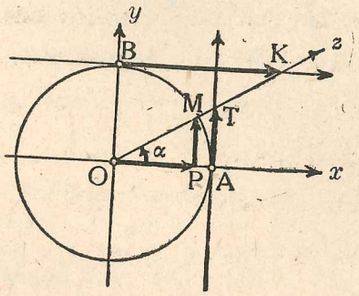
Not : Burada yapılan tanımlar, α açısı dar açı olduğu zaman, «No. 220» de yapılan tanımlarla özdeştir. Bunu, «Şek. 221» e dikkat ederek gösteriniz.

Ox, Oy eksenlerinin trigonometrik daireyi dört kadrana ayırdığını düşünürsek, yukardaki incelemeyi aşağıdaki tabloda özetleriz:

Açının bitim kenarı:	sin.	cos.	tg.	cotg.
I. kadranda	+	+	+	+
II. kadranda	+	−	−	−
III. kadranda	−	−	+	+
IV. kadranda	−	+	−	−

[*] $\overline{PM}$, $\overline{OP}$, $\overline{AT}$, $\overline{BK}$ değerleri, sıra ile PM, OP, AT, BK doğru parçalarının cebirsel değerlerini gösterir. Bu cebirsel değerler, doğru parçası eksenle aynı yönlü olursa pozitif, aksi halde negatiftir.

237. 0°, 90°, 180°, 270°, 360° lik açıların trigonometrik fonksiyonları. — xOz açısının Oz bitim kenarı Ox den başlamak üzere pozitif yönde dönerek çeşitli büyüklüklerdeki α açılarını meydana getirsin (Şek. 225).



Şek. 225

Eğer $\alpha = 0°$ ise, M ve T noktaları A ile çakışır; K noktası sonsuza gider. Buna göre:

$$\overline{PM} = 0,\ \overline{OP} = +1,\ \overline{AT} = 0,\ \overline{BK} = +\infty$$

yani:

$$\sin 0° = 0\ ,\quad \cos 0° = +1,$$
$$\operatorname{tg} 0° = 0\ ,\quad \operatorname{cotg} 0° = +\infty$$

olur.

Eğer $\alpha = 90°$ ise, M ve K noktaları B ile çakışır; T noktası $+\infty$ a gider. Buna göre:

$$\overline{PM} = +1\ ,\ \overline{OP} = 0\ ,\ \overline{AT} = +\infty\ ,\ \overline{BK} = 0$$

yani:

$$\sin 90° = +1\ ,\ \cos 90° = 0\ ,\ \operatorname{tg} 90° = +\infty\ ,\ \operatorname{cotg} 90° = 0$$

olur.

$\alpha = 180°$, $\alpha = 270°$, $\alpha = 360°$ olduğu zaman da yukardaki gibi muhakeme ederek:

$$\sin 180° = 0\ ,\ \cos 180° = -1\ ,\ \operatorname{tg} 180° = 0\ ,\ \operatorname{cotg} 180° = -\infty;$$
$$\sin 270° = -1\ ,\ \cos 270° = 0\ ,\ \operatorname{tg} 270° = -\infty\ ,\ \operatorname{cotg} 270° = 0;$$
$$\sin 360° = 0\ ,\ \cos 360° = +1\ ,\ \operatorname{tg} 360° = 0\ ,\ \operatorname{cotg} 360° = +\infty$$

olduğunu buluruz.

Bunları, aşağıdaki tabloda özetliyelim:

	0°	90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	180° (π)	270° $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	360° (2π)
sin.	0	+1	0	−1	0
cos.	+1	0	−1	0	+1
tg.	0	$+\infty$	0	$-\infty$	0
cotg.	$+\infty$	0	$-\infty$	0	$+\infty$

238. **Herhangi bir açının trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağlılıklar.** — «Bölüm XI» de dar açı için görülen bağlılıklar, her büyüklükteki açılar için de doğrudur. Meselâ 221, 222, 223, 224 üncü şekillerin her birinde:

1°. OMP dik üçgeninden:

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2$$

yahut:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

yazılır.

2°. OPM , OAT dik üçgenlerinin benzerliğinden:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} \quad \text{veya} \quad \overline{AT} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} \cdot 1$$

yahut:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

yazılır.

3°. OAT , OBK dik üçgenlerinin benzerliğinden:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BK}} \quad \text{veya} \quad \overline{AT} \cdot \overline{BK} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 1 \cdot 1 = 1$$

yahut:

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1}$$

yazılır. Buna göre:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

bulunur.

4. Yukarıdaki bağıntılardan istifade edilerek:

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\mp\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}} \quad , \quad \boxed{\cos \alpha = \frac{1}{\mp\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}}$$

eşitlikleri de yazılabilir [*].

[*] α açısının bitim kenarının bulunduğu kadrana göre, kare kökün işareti (+) yahut (−) olarak alınır.

BAZI AÇILARIN TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARI ARASINDAKİ BAĞINTILAR

239. **$(2k\pi + \alpha)$ açısının trigonometrik fonksiyonları.** — $(2k\pi + \alpha)$ açısı ile α açısının başlangıç ve bitim kenarları aynı olduğundan trigonometrik fonksiyonları birbirine eşit olur:

$$\sin (2k\pi + \alpha) = \sin \alpha \quad , \quad \operatorname{tg} (2k\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$
$$\cos (2k\pi + \alpha) = \cos \alpha \quad , \quad \operatorname{cotg} (2k\pi + \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha .$$

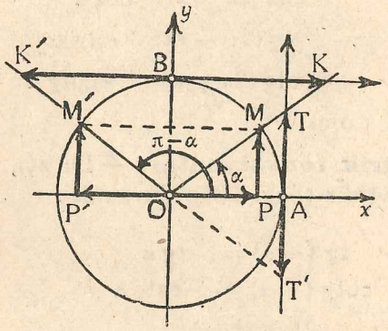
240. **$(\pi - \alpha)$ açısının trigonometrik fonksiyonları.** — Bu açı ile α açısı bütünlerdir. Başlangıç kenarları OA olan bu iki açının OM ve OM′ bitim kenarları Oy eksenine göre simetriktir (Şek. 226). Şu halde:

$$\overline{P'M'} = \overline{PM} \quad | \quad \overline{AT'} = -\overline{AT}$$
$$\overline{OP'} = -\overline{OP} \quad | \quad \overline{BK'} = -\overline{BK}$$

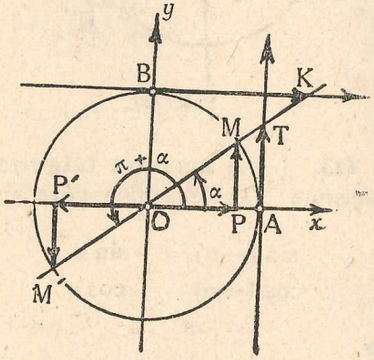
olduğundan:

$$\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad | \quad \operatorname{tg} (\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$
$$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad | \quad \operatorname{cotg} (\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha$$

olur.



Şek. 226



Şek. 227

241. **$(\pi + \alpha)$ açısının trigonometrik fonksiyonları.** — Bu açı ile α açısının OA başlangıç kenarları aynı, OM ve OM′ bitim kenarları ise O merkezine göre simetriktir (Şek. 227). Şu halde:

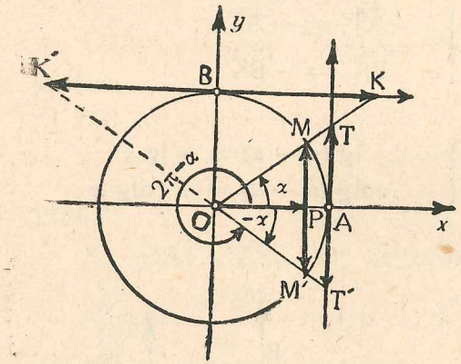
$$\overline{P'M'} = -\overline{PM} \quad | \quad \overline{AT} = \overline{AT}$$
$$\overline{OP'} = -\overline{OP} \quad | \quad \overline{BK} = \overline{BK}$$

olduğundan:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \quad | \quad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \quad | \quad \operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$$

olur.

242. $(2\pi - \alpha)$ açısının trigonometrik fonksiyonları. — Bu açı ile α açının OA başlangıç kenarları aynı, OM ve OM′ bitim kenarları ise Ox eksenine göre simetriktir (Şek. 228). Şu halde:



Şek. 228

$$\overline{PM'} = -\overline{PM}$$
$$\overline{OP} = \overline{OP}$$
$$\overline{AT'} = -\overline{AT}$$
$$\overline{BK'} = -\overline{BK}$$

olduğundan:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

olur.

243. $(-\alpha)$ açısının trigonometrik fonksiyonları. — Bu açı, α açısının Ox eksenine göre simetriğidir (Şek. 228). Şu halde:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad | \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = -\cos\alpha \quad | \quad \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

olur.

244. $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ açısının trigonometrik fonksiyonları. — Bu açı, α açısının tümleridir, $\widehat{BOM'} = \alpha$ alınırsa $BOM' = \frac{\pi}{2} - \alpha$ olur (Şek. 229). OPM , OP′M′ dik üçgenlerinin eşitliğinden:

$$\overline{P'M'} = \overline{OP}\ ,\ \overline{OP'} = \overline{PM}$$

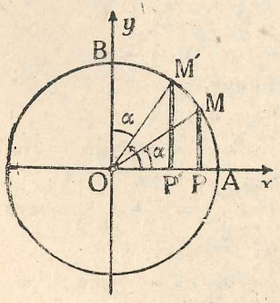
yazılır. Şu halde:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

olur. Bunları taraf tarafa bölerek:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$$

olduğu da bulunur.



Şek. 229

245. $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ açısının trigonometrik fonksiyonları. — Bu açı ile α açısının farkı, «$\frac{\pi}{2}$ radyan $= 90°$» dir. «No. 168» de bulunan formüllerde (α) yerine $(-\alpha)$ konulacak olursa:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

bulunur.

Not: Bu son bağıntıları şekilde görmek için, OM ye dik olan yarıçapı çizerek düşününüz (Şek. 229).

246. Uygulamalar:

1. $\frac{3\pi}{4}$ radyan $= 135°$ lik bir açının sin., cos., tg., cotg. ini bulunuz.

$\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ veya $135° = 180° - 45°$ olduğundan:

$\sin 135° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg} 45° = -1$, $\operatorname{cotg} 135° = -\operatorname{cotg} 45° = -1$

bulunur.

2. $\frac{7\pi}{6}$ **radyan = 210° lik bir açının sin., cos., tg., cotg. ini bulunuz.**

$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ veya $210° = 180° + 30°$ olduğundan :

$\sin 210° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$, $\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{tg} 210° = \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cotg} 210° = \operatorname{cotg} 30° = \sqrt{3}$,

bulunur.

3. $\frac{5\pi}{3}$ **radyan = 300° lik bir açının sin , cos., tg., cotg ini bulunuz.**

$\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ veya $300° = 360° - 60°$ olduğundan :

$\sin 300° = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 300° = \cos 60° = \frac{1}{2}$,

$\operatorname{tg} 300° = -\operatorname{tg} 60° = -\sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} 300° = -\operatorname{cotg} 60° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

bulunur.

4. $\frac{14\pi}{3}$ **radyan = 840° lik bir açının sin., cos., tg., cotg. ini bulunuz.**

Verilen açı 360° den büyük olursa, bu açının içinden 360° nin katları çıkarılır; geriye kalan açının trigonometrik fonksiyonları hesaplanır :

$\frac{14\pi}{3} = 2.\pi + \frac{2\pi}{3}$ veya $840° = 2 \cdot 360° + 120°$

olduğundan :

$\sin 840° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 840° = \cos 120° = -\frac{1}{2}$,

$\operatorname{tg} 840° = \operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} 840° = \operatorname{cotg} 120° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

bulunur.

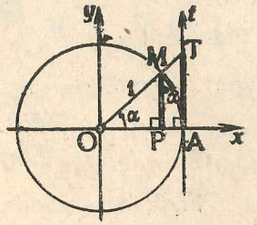
247. Önemli not. — Yarıçap uzunluğundaki *yay*'a «*1 radyanlık yay*» dendiğine göre, α radyanlık AOM merkez açısının karşısındaki yayın uzunluğu

$$\overset{\frown}{AM} = \alpha \cdot R$$

olur, Trigonometri çemberinde yarıçap $R = 1$ olduğundan

$$\overset{\frown}{AM} = \alpha$$

olur (Şek. 152). Demek ki:



Şek. 230

Trigonometri çemberinde her hangi bir merkez açının radyan cinsinden ölçüsü ile bu açının gördüğü yayın uzunluğunu gösteren sayı aynıdır.

Bu sebeple, «No. 160 dan No. 170» e kadar her hangi bir merkez açı için verdiğimiz trigonometrik fonksiyon tanımları, bu açıların gördüğü yaylar için de doğrudur.

Meselâ «Şek. 230» da $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ yayı için:

$$\sin \alpha = \overline{PM} \quad , \quad \operatorname{tg} \alpha = \overline{AT} \quad \text{dir.}$$

248. Küçük açı ve yaylar. — «Şek. 230» da

$$\overline{AT} > \overset{\frown}{AM} > \overline{PM}$$

olduğu aşikârdır. Şu halde

$$\operatorname{tg} \alpha > \alpha > \sin \alpha$$

veya $\sin \alpha$ ile her tarafı bölünce

$$\frac{1}{\cos \alpha} > \frac{\alpha}{\sin \alpha} > 1$$

yahut

$$\cos \alpha < \frac{\sin \alpha}{\alpha} < 1$$

olur. M noktası A ya doğru yaklaştıkça α küçülür ve gittikçe «0» ra yaklaşır. Dolayısiyle $\cos \alpha$, «1» e doğru yaklaşır. En nihayet $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ oranı, 1 den hem büyük hem küçük olamıyacağından, limit halde «1» e eşit olur. Yani pratikte, ***çok küçük açıların sinüsleri yerine bu açıların radyan ölçüleri alınabilir.***

Keza:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{veya} \quad \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$$

olduğundan α çok küçük bir değer aldığı zaman sağ tarafın değeri «1» e yaklaşır; dolayısiyle $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}$ da limit halde «1» e eşit olur. Yani pratikte, ***çok küçük açıların tangentleri yerine bu açıların radyan ölçüleri alınabilir.***

Fizik derslerinde bu özellikler sık sık kullanılır.

Bu özellikler, aşağıdaki tablonun tetkikinden de kolayca anlaşılır:

α nın değeri		Sin α	Tg α
Derece	Radyan		
1°	0,0175	0,0175	0,0175
2°	0,0349	0,0349	0,0349
3°	0,0524	0,0523	0,0524
4°	0,0698	0,0698	0,0699
5°	0,0873	0,0872	0,0875
...	....	....	....

Görülüyor ki α küçük iken $\sin\alpha$ ve $\operatorname{tg}\alpha$, «α radyan'a» eşit fakat α büyüdükçe

$$\sin\alpha < \alpha \qquad \text{ve} \qquad \operatorname{tg}\alpha > \alpha$$

oluyor.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN GRAFİKLERİ

249. $y = \sin x$ in grafiği. — x açısına 0° den başlıyarak verilen her değere karşılık $\sin x$ e, yani y ye bir değer bulunur.

x e verilen bir değere 2π katmakla $\sin x$ in değeri değişmez:

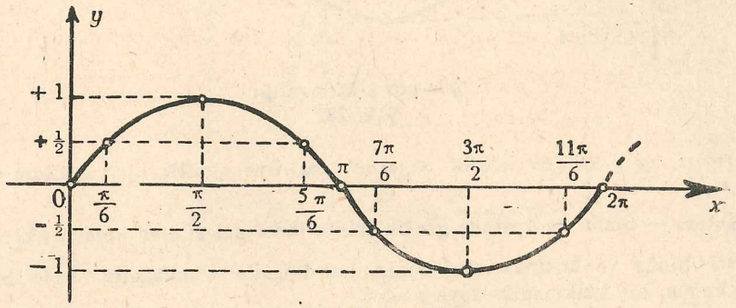
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Şu halde $\sin x$ fonksiyonu 2π peryotlu bir fonksiyondur. Yani bunun değişimini incelemek için x e $(0, 2\pi)$ aralığında değerler vermek yeter.

x e verilen çeşitli değerlere karşılık $\sin x$ in yani y nin aldığı değerler aşağıdaki tabloda görülmektedir:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	$0\nearrow$	$+\frac{1}{2}\nearrow$	$+1\searrow$	$+\frac{1}{2}\searrow$	$0\searrow$	$-\frac{1}{2}\searrow$	$-1\nearrow$	$-\frac{1}{2}\nearrow$	0

Bu tabloya göre «Şek. 231» deki grafik elde edilir:



$y = \sin x$ in grafiği
Şek. 231

Not: x e 2π den büyük değerler verilirse, grafik aynı şekilde devam eder.

250. $y = \cos x$ in grafiği. — x e verilen bir değere 2π katmakla $\cos x$ in değeri değişmez:

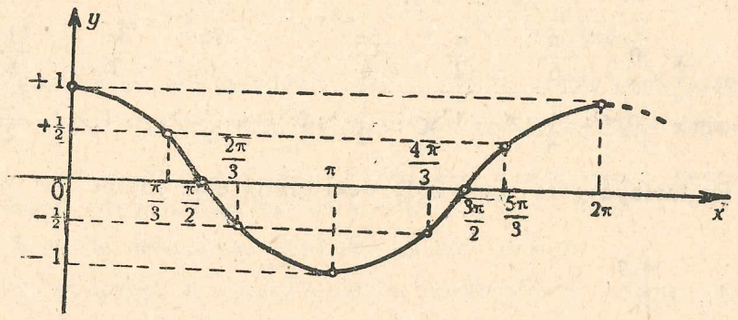
$$\cos(x \pm 2\pi) \cos x.$$

Şu halde $\cos x$ fonksiyonu da 2π peryotlu bir fonksiyondur. Yani bunun değişimini incelemek için x e $(0, 2\pi)$ aralığında değerler vermek yeter.

x e verilen çeşitli değerlere karşılık $\cos x$ in yani y nin aldığı değerler aşağıdaki tabloda görülmektedir:

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y = \cos x$	$+1\searrow$	$+\frac{1}{2}\searrow$	$0\searrow$	$\frac{-1}{2}\searrow$	$1-\nearrow$	$\frac{-1}{2}\nearrow$	$0\nearrow$	$+\frac{1}{2}\nearrow$	$+1$

Bu tabloya göre «Şek. 232» deki grafik elde edilir:



$y = \cos x$ in grafiği
Şek. 232

Not: x e 2π den büyük değerler verilirse grafik aynı şekilde devam eder.

İhtar. — Sinüs ve kosinüs grafiklerinin incelenmesinden anlaşılır ki:

1°. Sinüs ve kosinüs eğrilerinin her ikisi de kesiksizdir. Yani bunları çizen kalem, hiç kalkmadan devam eder.

2°. Sinüs eğrisi, sola doğru $\frac{\pi}{2}$ ye eşit bir uzunluk kadar kaydırılırsa kosinüs eğrisi elde edilir.

3°. x açısı ne değer alırsa alsın $\sin x$ ve $\cos x$, ancak $(-1, +1)$ aralığında değerler alabilir.

251. $y = \operatorname{tg} x$ in grafiği. — x e verilen bir değere π katmakla $\operatorname{tg} x$ in değeri değişmez:

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

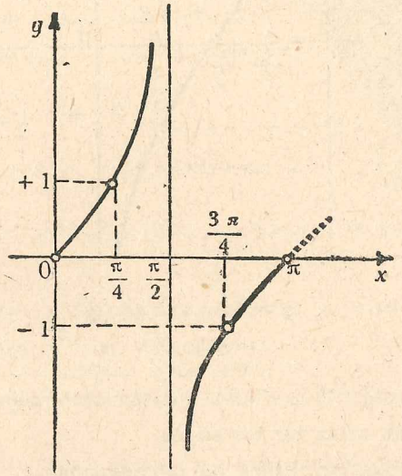
Şu halde $\operatorname{tg} x$ fonksiyonu π peryotlu bir fonksiyondur. Yani bunun değişimini incelemek için x e $(0, \pi)$ aralığında değerler vermek yeter.

x e $0°$ den $\frac{\pi}{2}$ ye kadar değerler verince $\operatorname{tg} x$, 0 dan $+\infty$ a kadar artar. x açısı $\frac{\pi}{2}$ yi çok küçük bir miktar kadar geçecek olursa $\operatorname{tg} x$ in değeri $-\infty$ a atlar.

x, $\frac{\pi}{2}$ den π ye kadar artınca $\operatorname{tg} x$ de $-\infty$ dan 0 ra kadar artan değerler alır.

Bu incelemeye göre aşağıdaki tablo ve «Şek. 233» deki grafik elde edilir:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \operatorname{tg} x$	$0 \nearrow$	$+1 \nearrow$	$+\infty \mid -\infty \nearrow$	$-1 \nearrow$	0



$y = \operatorname{tg} x$'in grafiği
Şek. 233

252. $y = \operatorname{cotg} x$ in grafiği. — x e verilen bir değere π katmakla $\operatorname{cotg} x$ in değeri değişmez:

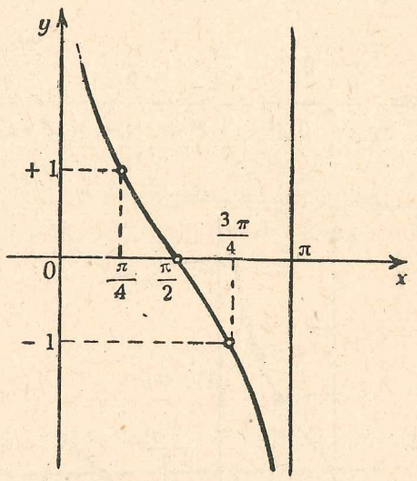
$$\operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x.$$

Şu halde $\operatorname{cotg} x$ fonksiyonu da π peryotlu bir fonksiyondur.

x e $(0, \pi)$ aralığında verilen çeşitli değerlere karşılık $\operatorname{cotg} x$ in yani y nin aldığı değerler aşağıdaki tabloda görülmektedir:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$y = \operatorname{cotg} x$	$+\infty \searrow$	$+1 \searrow$	$0 \searrow$	$-1 \searrow$	$-\infty$

Bu tabloya göre «Şek. 234» deki grafik elde edilir.



$y = \operatorname{cotg} x$'in grafiği

Şek. 234

Not: tg x ve cotg x in grafiklerinin incelenmesinden anlaşılır ki:

tg x fonksiyonu artan bir fonksiyon,

cotg x fonksiyonu ise eksilen bir fonksiyondur.

XI. BÖLÜM ÜZERİNE

PROBLEMLER

1. a) 150° , b) 225° , c) 315° , d) 1200° , e) $-30°$, f) $-24°$ *lik açıların* sin. , cos. , tg. , cotg. , *ini hesaplayınız:*

2. *Aşağıdaki çarpımın sayısal değerini bulunuz:*

a) $\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1)=\frac{3}{4}\cdot$

b) $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{5\pi}{3}\cdot tg\frac{7\pi}{6}=?$

c) $\sin\frac{7\pi}{2}\cdot\cos\frac{13\pi}{6}\cdot\operatorname{tg}\frac{9\pi}{3}\cdot\operatorname{cot}\frac{3\pi}{2}=?$

3. *Aşağıdaki açıların trigonomtrik fonksiyonlarını, x açısının trigonometrik fonksiyonları cinsinden bulunuz:*

a) $x-\pi$, b) $-x-\pi$, c) $5\pi+x$, d) $\pi-\frac{\pi}{2}$,

e) $\frac{\pi}{2}+x$, f) $\frac{3\pi}{2}-x$, g) $\frac{3\pi}{2}+\pi$, k) $\frac{5\pi}{2}-\pi$

Yol gösterme: a) $\sin(x-\pi)=\sin[-(\pi-x)]=-\sin(\pi-x)=-\sin x$

b) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x=\right)\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos x$.

4. *Aşağıdaki özdeşlikleri gerçekleyiniz:*

a) $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$;

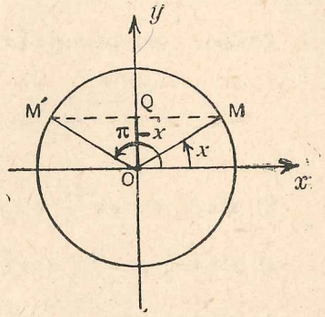
b) $3(\sin^4 x+\cos^4 x)-2(\sin^6 x+\cos^6 x)=1$;

c) $\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{cotg} x+\operatorname{cotg} y}=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg} y$;

d) $\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}=\operatorname{tg}^2 x$; e) $\sin^2 y-\sin^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}-\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$

5. $\sin x=+\frac{1}{2}$ *eşitliğine uyan x açılarını bulunuz.*

Çözüm: Sinüsler ekseni üzerinde $\overline{OQ}=+\frac{1}{2}$ olarak alınan Q noktasından bu eksene çizilen dikme, trigonometri çemberini M ve M′ de kestiğine göre AOM açısı ile AOM′ açısı aranılan açılardır (Şek. 235). Burada



Şek. 235

$$\widehat{AOM}=30° \quad , \quad \widehat{AOM'}=150°$$

olur.

Başlangıç kenarı OA ve bitim kenarı OM yahut OM′ olan her açının sinüsü $+\frac{1}{2}$ dir. Şu halde genel olarak, sinüsü $+\frac{1}{2}$ olan bütün x açıları

$$x=30°+k\cdot 360° \quad \text{yahut} \quad x=150°+k\cdot 360°$$

olarak bulunur (k her hangi bir tam sayıdır).

Bu formüller radyan olarak alınırsa:

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{6}$$

yahut

$$x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{6}$$

bulunur.

6. $(0, 2\pi)$ *aralığında* $\cos x = -\frac{1}{2}$ *eşitliğine uyan* x *açılarını bulunuz.*

7. $(0, 2\pi)$ *aralığında* $\operatorname{tg} x = -1$ *eşitliğine uyan* x *açılarını bulunuz.*

8. $(0, 2\pi)$ *aralığında* $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$ *eşitliğine uyan* x *açılarını bulunuz.*

9. *Aşağıdaki eşitliklere uyan bütün* x *açılarını bulunuz:*

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\operatorname{cotg} x = -1$.

10. $\sin x = \frac{4}{5}$ *olduğuna göre* x *açısının* cos , tg , cotg *ini hesaplayınız.*

11. $\cos x = -\frac{1}{3}$ *olduğuna göre* x *açısının* sin , tg , cotg , *ini hesaplayınız.*

12. $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ *olduğuna göre* $\sin x$, $\cos x$ *i bulunuz.*

13. *Aşağıdaki eşitliklerde, trigonometrik fonksiyonları alınan açıların her biri* $(0, 2\pi)$ *aralığında olduğuna göre, bu eşitliklere uyan* x *açılarını bulunuz:*

a) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

Çözüm: $\sin 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ olup, sinüsleri eşit olunca:

$$2x = x + \frac{\pi}{4} \quad \text{veya} \quad 2x + \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pi \quad \text{olacağından}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad \text{bulunur.}$$

b) $\sin 3x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 0$;

c) $\sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$;

d) $\sin x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; e) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = 1$;

f) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; g) $3\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

h) $4\sin^2 x - 1 = 0$ k) $\sin x + 2\cos x = 2\sin x \cdot \cos x + 1$;

m) $\sin\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; n) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0$

p) $4\sin^2(2x + 15°) = 1$; q) $4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = 3$.

14. *Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz:*

a) $y = 2\sin x$; b) $y = \frac{1}{2}\cos x$;

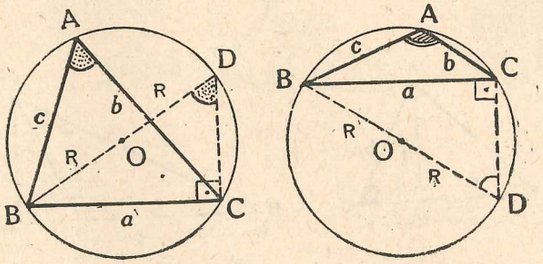
c) $y = 3\operatorname{tg} x$; d) $y = 1 + \sin x$.

BÖLÜM XIII

BİR ÜÇGENDE TEMEL TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR VE ÜÇGENLERİN ÇÖZÜMLERİ

253. Sinüs teoremi. — **Bir üçgenin kenarları, karşılarındaki açıların sinüsleri ile orantılıdır.**

İspatı: ABC üçgeninin (O, R) çevrel çemberini ve bu çemberin BD çapını çizelim (Şek. 236).



Şek. 236

Niçin $\widehat{A} = \widehat{D}$ veya $\widehat{A} + \widehat{D} = 180°$

olur? Her iki halde de

$$\sin A = \sin D$$

dir. BCD dik üçgeninde

$$\sin D = \frac{a}{2R} \quad \text{veya} \quad \frac{a}{\sin D} = 2R$$

olduğundan:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

bulunur. Bu son eşitlik, her kenar için tekrarlanabileceğinden:

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$

elde edilir.

254. Kosinüs teoremi. — **Her hangi bir üçgende bir kenarın karesi, diğer iki kenarın kareleri toplamından, bu kenarlar ile aralarındaki açının kosinüsü çarpımının iki katı kadar eksiktir.**

İspatı:

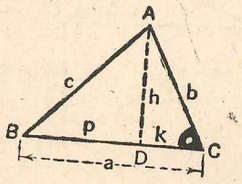
1. hal: C *açısı dar açı olsun* (Şek. 237).

$$c^2 = p^2 + h^2 = (a - k)^2 + h^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2a \cdot k$$

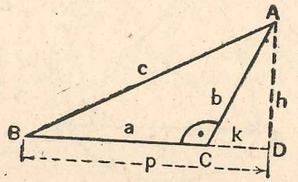
yazılır. $k = b \cdot \cos C$ konursa:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

bulunur.



Şek. 237



Şek. 238

2. hal: C *açısı geniş açı olsun* (Şek. 238);

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ak$$

yazılır. $k = b \cdot \cos \widehat{DCA} = b \cdot \cos (180° - C) = -b \cdot \cos C$ konursa:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

elde edilir.

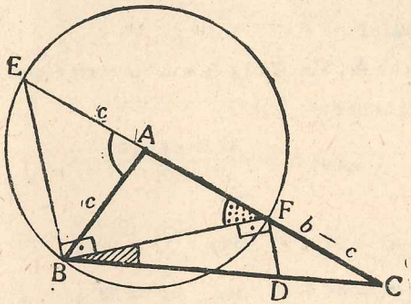
Aynı formülü çembersel mubadele ile her kenar için yazacak olursak:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}}$$

buluruz.

255. Tangent teoremi. — **Her hangi bir üçgende iki açının yarımları toplamı ile yarımları farkının tangentlerinin oranı, bu iki açı karşısındaki iki kenarın toplamı ile farkının oranına eşittir.**

(Y. g.) «Şek. 239» da A merkezli c yarıçaplı çember çizilmiş ve $FD \perp BF$ alınmıştır.



Şek. 239

$$CE = b + c \ , \ CF = b - c \ , \ FD \parallel EB ;$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{B} + \widehat{C}, \ \widehat{AFB} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \ , \ \widehat{FBC} = \frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$$

olur. Niçin?

Bunlara göre:

$$\frac{CE}{CF} = \frac{EB}{FD} = \frac{\frac{EB}{BF}}{\frac{FD}{BF}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}$$

yahut:

$$\boxed{\frac{b+c}{b-c} = \frac{\operatorname{tg} \frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{B-C}{2}}}$$

elde edilir.

Not: $\frac{\widehat{B+C}}{2} = 90° - \frac{\widehat{A}}{2}$ olup $\operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}$

konursa, yukardaki formül:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{cotg}\frac{A}{2}}$$

şeklinde yazılabilir.

256. Uygulamalar:

1. Bir üçgende cos A, sin A, tg A nın kenarlar cinsinden hesabı:

1° Kosinüs teoreminden:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

bulunur.

$a^2 < b^2 + c^2$ ise $\widehat{A} < 90°$;

$a^2 = b^2 + c^2$ ise $\widehat{A} = 90°$;

$a^2 > b^2 + c^2$ ise $\widehat{A} > 90°$;

olur. Niçin? (Bu hallerde $\cos A > 0$, $\cos A = 0$, $\cos A < 0$ olacağını görünüz.)

2°. $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = (1 - \cos A)(1 + \cos A)$

olduğundan, cos A yerine yukardaki değeri konursa:

$$\sin^2 A = \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2 A = \frac{2(u-b)\cdot 2(u-c)\cdot 2(u-a)\cdot 2u}{4b^2c^2}$$

$$= \frac{4u(u-a)(u-b)(u-c)}{b^2c^2}$$

ve nihayet:

$$\boxed{\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}}$$

elde edilir. Çembersel mübadele ile sin B ve sin C yi de hesaplayınız.

«No. 225» de ABC üçgeninin alanı

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$

olarak görüldüğünden:

$$\boxed{S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}}$$

bulunur. Demek ki:

$$\sin A = \frac{2S}{bc},\ \sin B = \frac{2S}{ca},\ \sin C = \frac{2S}{ab}$$

olarak yazılabilir.

3°. $\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2S}{bc} : \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4S}{b^2+c^2-a^2}$

bulunur.

2. Bir üçgende çevrel çember yarıçapının hesaplanması:

$\frac{a}{\sin A} = 2R$ den $R = \frac{a}{2\sin A}$ yahut:

$$\boxed{R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4S} = \frac{a\cdot b\cdot c}{4\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}}}$$

bulunur.

3. Bir ABC üçgeninde yüksekliklerin hesaplanması:

$S = \frac{1}{2}\,a\cdot h_a$ dan

$$\boxed{h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}}$$

olarak bulunur. Çembersel mubadele ile diğer yükseklikleri de bulunuz.

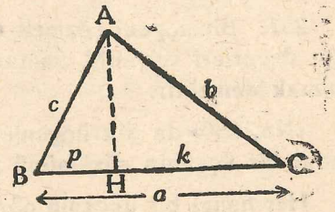
4. Her hangi bir üçgende:

$a = b\cos C + c\cos B$

$b = c\cos A + a\cos C$

$c = a\cos B + b\cos A$

bağıntıları vardır. Niçin?



Şek. 240

Çözüm: $a = p + k$ ve $p = c\cdot\cos B$, $k = b\cdot\cos C$

olduğu düşünülürse (Şek. 240), birinci eşitlik elde edilir. Buradan çembersel mubadele ile diğer ikisi de yazılır.

5. Bir ABC üçgeninde $b + c = 2a$ ise,

a) $2\sin A = \sin B + \sin C$; b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

bağıntıları vardır. Niçin?

Çözüm: a) Sinüs teoreminden:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2a}{\sin B+\sin C}$$

veya $2\sin A=\sin B+\sin C$ bulunur.

b) $a\cdot h_a=b\cdot h_b=c\cdot h=2S$ den a, b, c nin değeri S ye bağlı olarak çekilir ve $2a=b+c$ eşitliğinde yerine yazılırsa:

$$\frac{4S}{h_a}=\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c} \quad \text{veya} \quad \frac{2}{h_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

bulunur.

6. Kenarları:

$$a=x^2-xy+y^2\ ,\ b=x^2-y^2\ ,\ c=x^2-2xy$$

olan ABC üçgeninin A açısı 60° olur. Niçin?

Çözüm: Kosinüs teoremine göre:

$$(x^2-xy+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(x^2-2xy)^2-2(x^2-y^2)(x^2-2xy)\cdot\cos A$$

yazılır. Parantezler açılarak sadeleştirme yapılırsa:

$$-(x^2-2xy)(x^2-y^2)=-2(x^2-y^2)(x^2-2xy)\cos A$$

ve buradan

$$\cos A=\frac{1}{2}$$

elde edilir. Şu halde: $\widehat{A}=60°$ dir.

ÜÇGENLERİN ÇÖZÜMÜ

257. Bir üçgeni çözmek demek, bu üçgeni belirten üç elemanının sayı değerleri verildiği zaman, diğer elemanlarının sayı değerlerini bulmak demektir.

«No. 230» da dik üçgenlerin çözümlerini görmüştük. Şimdi de her hangi bir üçgenin çözümünü göreceğiz:

Her hangi bir üçgenin çözümü, aşağıdaki dört temel ödevin çözümüne götürülebilir:

1°. *Bir kenarı ile iki açısı bilinen üçgenin çözümü;*

2°. *İki kenarı ile bu kenarlar arasındaki açısı bilinen üçgenin çözümü;*

3°. *İki kenarı ile bu kenarlardan birine karşı olan açısı bilinen üçgenin çözümü;*

4°. *Üç kenarı bilinen üçgenin çözümü.*

258. Bir kenarı ile iki açısı bilinen üçgenin çözümü:

Verilenler:		İstenenler:	
	$a=117{,}8$ m		$\widehat{A}=?$
	$\widehat{B}=123°$		$b=?$
	$\widehat{C}=24°3'$		$c=?$

Çözüm:

$$\widehat{A}=180°-(\widehat{B}+\widehat{C})$$

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}\ ,\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}$$

formüllerinden yapılır. Burada b ve c nin eşitleri sinüs teoreminden elde edilmiştir. Her ikisi de logaritma yardımiyle hesaplanabilir:

$$\log b=\log a+\log\sin B+\operatorname{colog}\sin A,$$
$$\log c=\log a+\log\sin C+\operatorname{colog}\sin A.$$

$\widehat{A}$ *nın hesabı:*

$$\widehat{A}=180°-(123°+24°3')=32°57'.$$

b nin hesabı:

$\log a=2{,}07115$
$\log\sin B=\bar{1}{,}92359$
$\operatorname{colog}\sin A=0{,}26448$
$\log b=2{,}25922$

olur. Logaritma cetveli yardımiyle

$b=181{,}64$ m

bulunur.

c nin hesabı:

$\log a=2{,}07115$
$\log\sin C=\bar{1}{,}61016$
$\operatorname{colog}\sin A=0{,}26448$
$\log\sin c=1{,}94579$

$c=88{,}27$ m

bulunur.

259. İki kenarı ile bu kenarlar arasındaki açısı bilinen üçgeni çözmek:

Verilenler:		İstenenler:	
	$b=167$ m		$a=?$
	$c=145$ m		$\widehat{B}=?$
	$\widehat{A}=54°$		$\widehat{C}=?$

Çözüm:

$$\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=90^\circ-\frac{\widehat{A}}{2} \qquad (\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ),$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{cotg}\frac{A}{2} \qquad \text{(tangent teoremi)},$$

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B} \qquad \text{(sinüs teoremi)}$$

formüllerinden yapılır. Son ikisi logaritma ile hesaplanabilir:

$$\log\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\log(b-c)+\operatorname{colog}(b+c)+\log\operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

$$\log a=\log b+\log\sin A+\operatorname{colog}\sin B.$$

Yardımcı hesaplar: $b-c=22$, $b+c=312$, $\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=63^\circ$.

$\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}$ *nin hesabı:*

$$\log(b-c)=1{,}34242$$
$$\operatorname{colog}(b+c)=\bar{3}{,}50585$$
$$\log\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=0{,}29283$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=\bar{1}{,}14110$$

$$\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=7^\circ52'55''$$

olur. Halbuki:

$$\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=63^\circ$$

dir. Bu ikisinden:

$$\widehat{B}=70^\circ52'55''$$
$$\widehat{C}=55^\circ07'05''$$

bulunur.

a nın hesabı:

$$\log b=2{,}22272$$
$$\log\sin A=\bar{1}{,}90796$$
$$\operatorname{colog}\sin B=0{,}02465$$
$$\log a=2{,}15533$$
$$a=142{,}99\text{ m}$$

bulunur.

260. İki kenarı ile bu kenarlardan birine karşı olan açısı bilinen üçgenin çözümü:

$$\text{Verilenler}:\begin{cases} a=85{,}40\text{ m}, \\ b=38{,}85\text{ m}, \\ \widehat{B}=15^\circ25'. \end{cases} \qquad \text{İstenenler}:\begin{cases} \widehat{A}=? \\ \widehat{C}=? \\ c=? \end{cases}$$

Çözüm: $b<a$ olduğundan problemin iki çözümü vardır [*].

$\widehat{A}$ *nın hesabı:*

$$\sin A=\frac{a\cdot\sin B}{b}$$

$$\log\sin A=\log a+\log\sin B+\operatorname{colog} b$$
$$\log a=1{,}93146$$
$$\log\sin B=\bar{1}{,}42461$$
$$\operatorname{colog} b=\bar{2}{,}41061$$
$$\log\sin A=\bar{1}{,}76668$$

olur. Buradan $\widehat{A}=35^\circ45'$ yahut $\widehat{A}=144^\circ15'$

bulunur. Buna göre $\widehat{C}=128^\circ50'$ yahut $\widehat{C}=20^\circ20'$ olur.

c nin hesabı:

$$c=\frac{b\cdot\sin C}{\sin B}$$

$$\log c=\log b+\log\sin C+\operatorname{colog}\sin B$$

$\log b=1{,}58939$		$1{,}58939$
$\log\sin C=\bar{1}{,}89152$	yahut	$\bar{1}{,}54093$
$\operatorname{colog}\sin B=0{,}57539$		$0{,}57539$
$\log c=2{,}05630$		$1{,}70571$
$c=113{,}84$ m	yahut	$c=50{,}782$ m.

[*] Verilen bu üç elemanla biçimleri başka başka olan iki üçgen çizmek mümkündür. Eğer bu elemanlarla üçgen çizilmezse, o zaman çözümü de söz konusu olamaz.

261. Üç kenarı bilinen üçgenin çözümü:

Verilenler: $a = 8$ m, $b = 7$ m, $c = 5$ m. **İstenenler:** $\widehat{A} = ?$, $\widehat{B} = ?$, $\widehat{C} = ?$

Çözüm: $\widehat{A}$ *nın hesabı:*

$$\sin A = \frac{2}{b \cdot c}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

olduğunu görmüştük. $2u = 8 + 7 + 5 = 20$, $u = 10$ olduğundan:

$$\sin A = \frac{2}{7 \cdot 5}\sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)}$$

$$\sin A = \frac{2}{35}\sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{35}\sqrt{100 \cdot 3}$$

$$\sin A = \frac{4}{7}\sqrt{3}$$

bulunur. Her iki tarafın logaritmasını alarak:

$$\log \sin A = \log 4 + \frac{1}{2}\log 3 + \operatorname{colog} 7$$

$$\log \sin A = 0{,}60206 + 0{,}23856 + \bar{1}{,}15490$$

$$\log \sin A = \bar{1}{,}99552$$

$$\widehat{A} = 81°47'$$

elde edilir.

$\widehat{B}$ *nin hesabı:*

$$\sin B = \frac{2}{a \cdot c}\sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

olduğundan, sayı değerlerini yerine koyarak:

$$\sin B = \frac{2}{8 \cdot 5}\sqrt{100 \cdot 3} = \frac{20}{40}\sqrt{3}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\widehat{B} = 60°$$

bulunur. Şu halde:

$$\widehat{C} = 38°13' \quad \text{dır.}$$

Not: A açısı bulunduktan sonra üçgen, «No. 257» temel çözümü gibi de çözülebilir.

XIII. BÖLÜM ÜZERİNE PROBLEMLER

1. *Bir* ABC *üçgeninde:*

$$\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{S}{2R^2} \qquad (1)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Sinüs teoreminden:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} = 8R^3$$

elde edilir. $a \cdot b \cdot c = 4R \cdot S$ olduğundan (1) bağıntısı bulunur.

2. *Bir* ABC *üçgeninde:*

$$S = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}$$

olduğunu gösteriniz. ($2S = bc \sin A$ olduğunu göz önüne alınız.)

3. *Bir* ABC *üçgeninde:*

$$a = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}}, \quad b = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin B}{\sin C \cdot \sin A}}, \quad c = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin C}{\sin A \cdot \sin B}}$$

olduğunu gösteriniz.

4. *Her hangi bir* ABC *üçgeninde aşağıdaki bağlılıkların varlığını gösteriniz:*

a) $b \cos C - c \cos B = \frac{b^2 - c^2}{a}$.

b) $\sin B \cdot \sin C = \frac{h_a}{2R}$. ($bc = 2R \cdot h_a$ bağlılığından faydalanınız).

c) $\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{a}{h_a}$.

d) $\operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \frac{a}{r}$. ($r$ iç teğet çemberinin yarıçapıdır.)

5. *Bir* ABC *üçgeninde:*

a) $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{u-a} = \frac{r_a}{u}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{u-b} = \frac{u-c}{r_a}$

b) $\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} = \frac{(u-b)(u-c)}{u(u-a)}$

olduğunu gösteriniz. (r iç teğet çemberin yarıçapı, r_a da A açısı içindeki dış teğet çemberin yarıçapı, u ise yarım çevredir).

6. *Bir* ABC *üçgeninde* $a = 2h_a$ *ise,*

$$\cot g\, B + \cot g\, C = 2$$

dir. Niçin?

7. *Bir üçgende kosinüs teoreminin aşağıdaki şekilde yazılabileceğini gösteriniz:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S \cdot \cot g\, A,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 4S \cdot \cot g\, B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 4S \cdot \cot g\, C.$$

8. *Bir* ABC *üçgeninde aşağıdaki bağlılıkların varlığını gösteriniz:*

a) $a^2 - b^2 = 2S\,(\cot g\, B - \cot g\, C)$,

b) $a^2 + b^2 + c^2 = 4S\,(\cot g\, A + \cot g\, B + \cot g\, C)$.

9. *A açısı* 120° *olan bir üçgenin kenarları arasında*

$$c\,(a^2 - c^2) = b\,(a^2 - b^2)$$

bağıntısı vardır. Niçin?

10. *Bir üçgende:*

$$a = x^2 + x + 1\ ,\quad b = 2x + 1\ ,\quad c = x^2 - 1$$

olduğuna göre A *açısının* 120° *olduğunu gösteriniz.*

11. *Bir* ABC *üçgeninde:*

$$\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$$

ise A *açısı* 60° *dir. Niçin?*

12. *Bir üçgende:*

$$a = 2b \cos C$$

bağıntısı varsa bu üçgen ikizkenardır. Niçin?

Çözüm: Bir üçgende

$$a = b \cos C + c \cos B$$

olduğunu biliyoruz. a yerine yukardaki eşidi yazılırsa

$$b \cos C = c \cos B$$

bulunur. Sinüs teoreminden

$$b = 2R \sin B,\quad c = 2R \sin C$$

bulunur ve yerine konursa

$$\sin B \cdot \cos C = \sin C \cdot \cos B$$

yahut

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C$$
$$\widehat{B} = \widehat{C}$$

bulunur. Demek ki bu üçgen ikizkenardır.

13. *Bir üçgende:*

$$\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$$

bağıntısı varsa bu üçgen ikizkenardır. Niçin?

14. *Bir üçgenin açıları arasında*

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$$

bağıntısı varsa bu üçgen diktir. Niçin?

15. *Bir üçgende* $\widehat{A} = 45°$, $b = 4$, $c = \sqrt{2}$ *dir. Logaritma cetveli kullanmadan* sin B, sin C; , cos B, cos C *yi hesaplayınız.*

16. *Bir üçgende* $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$, $\widehat{C} = 60°$ *dir. Bu üçgeni logaritma cetveli kullanmadan çözünüz.*

17. *Bir üçgende* $a = \frac{7}{3}c$, $b = \frac{8}{3}c$ *dir. Bu üçgende* $\widehat{A} = 60°$ *olduğunu gösteriniz.* (cos A = 1/2 olacağını görünüz.)

18. *Bir üçgende* $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = 1 + \sqrt{3}$ *dür. Logaritma cetveli kullanmadan* $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 60°$, $\widehat{C} = 75°$ *olacağını bulunuz.*

19. *Bir üçgende* $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ *dür. Logaritma cetveli kullanmadan* $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 45°$, $\widehat{C} = 75°$ *olacağını gösteriniz.*

20. *Bir dik üçgende dik kenarların oranı* $\frac{b}{} = 2 + \sqrt{3}$ *olarak veriliyor. Bu üçgende* $\widehat{B} = 75°$, $\widehat{C} = 15°$ *olduğunu gösteriniz.*

(Y. g) Tangent teoreminden faydalanarak $\frac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2} = 30°$ olacağını görünüz.

21. *Kenarları* 8 cm , 7 cm , 5 cm *olan üçgenin:*

a) S *alanını;* b) *yüksekliklerini;* c) R *çevrel yarıçapını;*

d) *İç çemberin r yarıçapını hesaplayınız.* ($S = u \cdot r$ olduğunu göz önüne alınız.)

22. *Güneş ufuktan* 52°30′ *yükseklikte iken* 96 m *gölgesi olan bir kulenin yüksekliği nedir?*

23. *Aşağıdaki elemanları bilinen üçgenleri çözünüz:*

1) $a = 50$ m , $\widehat{B} = 40°$, $\widehat{C} = 60°$;

2) $b = 10$ m , $c = 15$ m , $\widehat{A} = 60°$;

3) $b = 8$ m , $c = 10$ m , $\widehat{C} = 45°$;

4) $a = 14$ m , $b = 10$ m , $c = 8$ m ;

5) $a = 15{,}84$ m , $\widehat{A} = 45°50'$, $\widehat{C} = 50°10'$;

6) $a = 176{,}2$ m , $b = 186{,}6$ m , $\widehat{C} = 40°40'$;

7) $a = 20{,}42$ m , $b = 16{,}50$ m , $\widehat{B} = 30°30'$;

8) $a = 11$ m , $b = 7$, $c = 6$ m ;

9) $b + c = 252{,}40$ m , $b - c = 7{,}60$ m , $\widehat{A} = 90°$;

10) $a = 5$ m , $\widehat{A} = 90°$, $\sin B = 2 \sin C$ bağı.

24. *Tepe açısı* 47°24'28'' *ve tepeden geçen yüksekliği* 176,40 m *olan ikizkenar üçgenin alanını bulunuz.* (**Cevap:** $S = 13661$ m².)

25. $b = c = 2$ m , $S = 1$ m² *olan ikizkenar üçgeni çözünüz.*

MÜSABAKA PROBLEMLERİ

1. *Taban yarıçapı* 3 cm *ve yüksekliği* 8 cm *olan içi dolu bir demir silindir yontulmak suretiyle düzgün sekizgen tabanlı bir dik prizma şekline sokuluyor. Tesviye (yontma) esnasında kaybolan demirin ağırlığını hesabediniz* (1 *santimetreküb demirin ağırlığı* 7,8 *gramdır.*).

(12 Nisan 1954 İ. T. Ü. — *Teknik Okulu* sıralama imtihanı sorusu.)

2. x *açısı* 0° *ile* 90° *arasında kalmak şartiyle*

$$\sin^2 x - 2b \sin x + \frac{1}{9} = 0$$

denklemini sağlıyan iki kökün mevcut olması için b *ne olmalıdır?*

(15 Ekim 1956 İ. T. Ü. — *Teknik Okulu* giriş sorusu.)

Yol gösterme: 0° ile 90° nin *sinüs*'leri 0 ile 1 dir. $\sin x = y$ deyiniz ve ele geçen denklemin iki kökününde 0 ile 1 arasında bulunma şartlarını arayınız.

3. *Hacım ve toplam yüzölçümleri birbirine eşit olan birbirinden farklı iki silindirden birinin* R *yarıçapını ve* H *yüksekliğini diğerinin* r *yarıçapı ile* h *yüksekliği cinsinden bulunuz.* (R *yi veren denklemi çarpanlara ayırarak çözünüz*).

r ile h arasında nasıl bir bağıntı bulunmalıdır ki, bu iki silindir birbirinden farklı olmasın.

(2 Ekim 1958 İ. T. Ü. — *Teknik Okulu* giriş sorusu.)

4. *Taban yarıçapı* r *ve yüksekliği* h *olan bir dik koni veriliyor. Bu koniye içerden teğet olmak üzere bir küre çiziliyor. Bu kürenin yarıçapı* a *olduğuna göre:*

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{2}{ah}$$

bağıntısını çıkarınız.

(1958 — 59 yılı Yüksek Denizcilik Okulu giriş sorusu.)

5. *Alt ve üst tabanları eşkenar üçgenler olan bir dik kesik piramitte alt tabanın kenar uzunluğu* $2a$, *üst tabanın kenar uzunluğu ise* a *dır. Piramidin yan yüzeyleri, üst tabanın kenarları etrafında döndürülerek, üst taban düzlemine yatırılıyor. Böylece elde edilen şeklin bütün dış köşeleri birleştirilmek suretiyle meydana gelen şekil* $2a$ *kenarlı bir düzgün altıgen olduğuna göre: bu kesik piramidin bir yan kenarını ve hacmını hesaplayınız.*

(1959 — 60 P. T. T. hesabına yabancı memleketlerde mühendislik tahsili için seçme imtihanı sorusu.)

6. Kenar uzunluğu a olan bir ABCD karesinin AB kenarından, karenin bulunduğu yarım düzlemle 120° lik bir açı teşkil eden bir (P) yarım düzlemi geçiriliyor; CD nin F orta noktası ile AB nin E orta noktaamı birleştiren doğru üzerinde EH = FE olmak üzere H noktası alınıyor. H den kare düzlemine çıkılan dikmenin (P) düzlemini deldiği S noktası verilen karenin köşelerine birleştirilmek suretile meydana gelen piramidin:

1°. Hacmını;

2°. Toplam yüzölçümünü a cinsinden hesaplayınız.

(8 Ekim 1960 İ. T. Ü. — *Teknik Okulu* giriş sorusu).

7. AB ($= a$) kenarları ortak ve düzlemleri birbirine dik olan ABCD ve ABEF gibi iki kare veriliyor. Birincinin AC köşegeni üzerinde A dan x uzaklığında bulunan bir P noktası ve ikincinin BF köşegeni üzerinde F den x uzaklığında olan bir P' noktası alınıyor.

1° PP' doğru parçasının uzunluğunu x cinsinden hesaplayınız ve bu uzunluğun hangi x ler için en küçük ve en büyük değerleri aldığını belirtiniz.

2° PP' ile AC arasındaki açıyı x cinsinden bulunuz ve PP' nün en küçük olduğu halde bu açının değerini hesaplayınız.

(14 Eylül 1960 *Süberbank* hesabına yabancı memleketlerde mühendislik tahsili için seçme imtihanı sorusu.)

8. Bir ABC üçgeni, bu üçgenin dışına çizilen dairenin A noktasındaki teğeti etrafında döndürülüyor.

1°. $\overline{BC} = a$ kenarının doğuracağı yüzeyin alanını,

2° Üçgenin dönmesinden meydana gelen hacmı hesabediniz. $\widehat{A} = 90°$ olması halinde yukarıdaki alan ve hacmın değerleri ne olur?

(20 Ekim 1960 *Etibank* hesabına yabancı memleketlerde mühendislik tahsili için seçme imtihanı sorusu.)

İÇİNDEKİLER

ve

Konuların Aylara Taksimi

UZAY GEOMETRİ

EKİM:

BÖLÜM I

	Sayfa
Uzayda doğru ve düzlemler	3
Bir düzlemin belirtilmesi	5
İki düzlemin arakesiti	8
Üç düzlemin arakesiti	8
Problemler	10
Çizim problemleri	13

BÖLÜM II

PARALEL DOĞRU VE DÜZLEMLER

Paralel doğrular	14
Doğru ile düzlemin paralelliği	15

KASIM:

Problemler	18
Paralel düzlemler	19
Kenarları paralel açılar	22
Problemler	24
Geometrik yer problemleri	25
Çizim problemleri	26

BÖLÜM III

DİK DOĞRU VE DÜZLEMLER

Doğrunun düzleme dikliği	27
Dikme ve eğikler	28
Uygulamalar	24

ARALIK:

	Sayfa
Problemler	36
Geometrik yer problemleri	37
Çizim problemleri	38

BÖLÜM IV

İKİ DÜZLEMLİ AÇILAR VE DİK DÜZLEMLER

İki düzlemli açılar	39
Dik düzlemler	41
Problemler	45
Gometrik yer problemleri	46
Çizim problemleri	46

OCAK:

BÖLÜM V

DİK İZDÜŞÜM

Bir şeklin izdüşümü	47
Bir dik açının izdüşümü	49
Bir doğrunun bir düzlemle yaptığı açı	50
Bir doğrunun bir düzleme göre en büyük eğim doğrusu	52
Bir düzlem şeklin bir düzlem üzerindeki izdüşümünün alanı	53
Problemler	55
Geometrik yer problemleri	57
Çizim problemleri	57

ŞUBAT:

BÖLÜM VI

PRİZMALAR

	Sayfa
Prizmatik yüzey	58
Özel prizmalar	61
Prizmanın alanı	62
Problemler	63

MART:

Prizmanın hacmı	64
Uygulamalar	70
Problemler	72
Çizim problemleri	74

BÖLÜM VII

PİRAMİTLER

Tanımlar	75
Düzgün pramit ve yanal alanı	76
Düzgün dörtyüzlü	74
Düzgün sekizyüzlü	78
Pramidin bir düzlemle kesilmesi	78
Piramidin hacmı	80
Kesik pramit	81
Uygulamalar	84
Problemler	85

NİSAN:

BÖLÜM VIII

SİLİNDİR

Tanımlar	87
Silindirin iç ve dış prizmaları	88
Dönel silindirin alanı	89
Silindirin hacmı	91
Uygulama	91
Problemler	93

BÖLÜM IX

KONİ

Tanımlar	95
Koninin iç ve dış piramitleri	97
Dönel koninin alanı	98
Koninin hacmı	99
Uygulamalar	102
Problemler	103

MAYIS:

BÖLÜM X

KÜRE

	Sayfa
Tanımlar	107
Bir kürenin belirtilmesi	111
Çok yüzlü cisimlerin dış ve iç küreleri	113
Kürenin alanı	113
Kürenin hacmı	117
Uygulamalar	121
Problemler	123
Karışık problemler	124

TRİGONOMETRİ

EKİM:

BÖLÜM XI

İLK TRİGONOMETRİ BİLGİSİ

Açı ve yay birimleri	126
Dar açıların trigonometrik oranları	128
Tümler iki açının trigonometrik oranları	130

KASIM:

Önemli açıların trigonometrik oranları	131
Bir açının trigonometrik oranlarından birisi belli iken diğerlerini bulmak	133
Problemler	135
Trigonometri cetveli	135

ARALIK:

Dik üçgenlerin çözümü	137
Problemler	139

BÖLÜM XII

AÇI KAVRAMININ GENELLEŞTİRİLMESİ

Sayfa

Herhangi bir açının trigonometrik fonksiyonları 140
0°, 90°, 180°, 270°, 360° lik açıların trigonometrik fonksiyonları . . 143
Herhangi bir açının trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağlılıklar 144

OCAK:

Bazı açıların trigonometrik fonksiyonları arasındaki bağlılıklar . . 145
Uygulamalar 147
Küçük açı ve yaylar 149
Trigonometrik fonksiyonların grafikleri 150

ŞUBAT:

Sayfa

Problemler 154

MART:

BÖLÜM XIII

BİR ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK BAĞINTILAR VE ÜÇGENLERİN ÇÖZÜMLERİ

Sinüs teoremi 157
Kosinüs teoremi 158
Kangent teoremi. 159
Uygulamalar 160

NİSAN ve MAYIS:

Üçgenlerin temel çözümleri . . . 162
Problemler 167
Müsabaka soruları 170

Not: Konuların aylara taksimi, dört yıllık tatbikatın verdiği sonuçlar göz önüne alınarak yapılmıştır.

Haftada bir geometri dersini trigonometriye ayırarak, trigonometri konularını sene başından itibaren işlemek, *fizik* derslerine faydalı olmaktadır.

Trigonometrik Fonksiyonların Değerleri

Derece	Sin	Tg	Cotg	Cos	Derece
0	0,0000	0,0000	∞	1,0000	90
1	0,0175	0,0175	57,2900	0,9998	89
2	0,0349	0,0349	28,6361	0,9994	88
3	0,0523	0,0524	19,0811	0,9986	87
4	0,0698	0,0699	14,3007	0,9976	86
5	0,0872	0,0875	11,4300	0,9962	85
6	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	84
7	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	83
8	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	82
9	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	81
10	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	80
11	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	79
12	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	78
13	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	77
14	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	76
15	0,2588	0,2679	3,7321	0,9659	75
16	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	74
17	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	73
18	0,3090	0,3249	3,0777	0,9511	72
19	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	71
20	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	70
21	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	69
22	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	68
23	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	67
24	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	66
25	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	65
26	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	64
27	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	63
28	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	62
29	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	61
30	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	60
31	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	59
32	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	58
33	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	57
34	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	56
35	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	55
36	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	54
37	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	53
38	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	52
39	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	51
40	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	50
41	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	49
42	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	48
43	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	47
44	0,6947	0,9647	1,0355	0,7193	46
45	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	45
Derece	Cos	Cotg	Tg	Sin	Derece